გოჩა ჩავლეშვილი

თანაკვეთის წირების აგება ტოპოლოგიური და კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით

წარდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო

თებერვალი, 2008 წ.

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სიტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ჩავლეშვილი გოჩას მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: "თანაკვეთის წირების აგება ტოპოლოგიური და კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით" და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქარველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის "ინფორმატიკისა და მართვის სიტემების ფაკულტეტის" სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: პროფ. ა.ლაშხი

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

წელი

ავტორი:	ჩავლეშვილი გოჩა
დასახელება:	თანაკვეთის წირების აგება ტოპოლოგიური და კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით
ფაკულტეტი :	ინფორმატიკისა და მართვის სიტემების ფაკულტეტი
აკადემიური ხარისხი:	დოქტორი
სხდომა ჩატარდა:	თარიღი

რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია გეომეტრიის განვითარების მოკლე მიმოხილვა, ჩამოყალიბებულია გამოყენებითი და კონსტრუქციული გეომეტრიის ზოგადი პრინციპები და მიმართულებები.

გეომეტრია თავისი პირვანდელი მნიშვნელობით არის მეცნიერება ფიგურებზე, მათი ნაწილების ურთიერთგანლაგებაზე, ზომებზე და, აგრეთვე, გარდაქმნებზე. ეს განსაზღვრა სავსებით ეთანხმება გეომეტრიის განსაზღვრას როგორც მეცნიერებას სივრცით ფორმებზე და მათ მიმართებებზე. მართლაც, ფიგურა, როგორც იგი განისაზღვრება გეომეტრიაში, არის სივრცითი ფორმა (ამიტომ გეომეტრიაში ამბობენ, მაგალითად, "ბირთვი" და არა "ბირთვის ფორმის ფიგურა"); განლაგება და ზომები განისაზღვრება სივრცითი მიმართებებით; და ბოლოს, გარდაქმნა, როგორც მას გეომეტრიაში განიხილავენ, აგრეთვე არის გარკვეული მიმართება ორ ფიგურას შორის - მოცემულსა და მის ანასახს შორის. თანამედროვე, უფრო ზოგადი თვალსაზრისით, გეომეტრია მოიცავს სხვადასხვა მათემატიკურ თეორიებს, რომელთა გეომეტრიისადმი კუთვნილება განისაზღვრება არა მარტო ჩვეულებრივ სივრცით ფორმებთან და მიმართებებთან მათი საგნის მსგავსებით (თუმცა ზოგჯერ საკმაოდ შორეული), არამედ აგრეთვე იმითაც, რომ ისინი ისტორიულად ყალიბდებოდნენ და ყალიბდებიან გეომეტრიის პირვანდელი მნიშვნელობის საფუძველზე და თავის მსჯელობაში გამომდინარეობენ გეომეტრიის ანალიზიდან, განზოგადებიდან და სახეცვლილებიდან. ამ ზოგადი თვალსაზრისით გეომეტრია მჭიდროდ არის გადახლართული მათემატიკის სხვა დარგებთან და მისი საზღვრები არ არის მკაფიოდ დადგენილი.

გამოყენებით გეომეტრიაში ამოცანები გრაფიკულად სრულდება და მათი გადაწყვეტის დროს გრაფიკული აგებების სირთულე დამოკიდებულია არა მხოლოდ ამოცანის სირთულეზე, არამედ დიდწილად განპირობებულია ფიგურის და გეგმილთა სიბრტყეების ურთიერთგანლაგებით, რომლის შეცვლა ხერხდება ეპიურის გარდაქმნის საყოველთაოდ ცნობილი კლასიკური მეთოდების და დამატებითი დაგეგმარების გამოყენებით. ყოველ ასეთ მეთოდს გააჩნია ამოცანათა ჯგუფი, რომელთათვისაც მის გამოყენებას საუკეთესო შედეგი აქვს ამოცანის გადაწყვეტის სიმარტივის და სიზუსტის თვალსაზრისით. ძირითადად, ეს არის ამოცანები, რომლებშიც მონაწილეობენ წრფოვანი და ბრუნვის ზედაპირები.

ამასთან ერთად, არსებობს ამოცანების დიდი ჯგუფი, რომლებშიც მონაწილეობენ არაწრფოვანი ზედაპირები. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტა ეპიურის გარდაქმნის კლასიკური მეთოდების გამოყენებით მოითხოვს დიდი მოცულობის აგებების ჩატარებას და ხშირად არაზუსტიც არის. ასე, მაგალითად, ორი მრუდწირული ზედაპირის თანკვეთის წირის აგებაში მონაწილეობენ ლეკალური წირები. ცხადია, სასურველია

ავიცილოთ მათი აგება და გადავიდეთ ამოცანის ისეთ გადაწყვეტაზე, რომელიც შედარებით უფრო მარტივად მოხერხდება. სამწუხაროდ, კლასიკური მეთოდები ვერ უზრუნველყოფენ ასეთი გადასვლის შესაძლებლობას. დადებითი შედეგის მიღწევა შესაძლებელი გახდა კოლინეარული, ტოპოლოგიური და სივრცის სხვა გარდაქმნების დახმარებით.

ამოცანების ამოხსნაში სივრცის გარდაქმნების გამოყენებამ დასაბამი დაუდო მხაზველობითი გეომეტრიის ახალ მეთოდს, რომელსაც შეიძლება უწოდოთ სივრცის გარდაქმნების მეთოდი. ეს მეთოდი ეყრდნობა იმ მოსაზრებას, რომ განსახილველი ფიგურები არ არიან ხისტები და შესაძლებელია მათი დეფორმირება იმ სამგანზომილებიანი სივრცის გარდაქმნით, რომელშიდაც ეს ფიგურები მდებარეობენ. სახელდობრ, კოლინეარული გარდაქმნების თვისებები გვაძლევენ შესაძლებლობას ავსახოთ წრფოვანი ზედაპირები მაგეგმილებელ ზედაპირებზე, ხოლო ამოცანაში მონაწილე მეორე რიგის მრუდწირული ზედაპირები - შედარებით მარტივ და ამოხსნისათვის მოხერხებულ ბრუნვის ზედაპირებზე, კერძოდ სფეროზე. ამასთან, მოცემულ ფიგურასა და მის ანასახს შორის მყარდება გარკვეული შესაბამისობა, რომელიც განსაზღვრავს სივრცის კონკრეტულ გარდაქმნას. ასეთი გარდაქმნის არსებობა გვაძლევს შესაძლებლობას ამოცანაში მონაწილე დანარჩენი ფიგურების ანასახებიც ავაგოთ და გამოვიყენოთ ეს მეთოდი ამოცანის ამოხსნის გასამარტივებლად.

ნაშრომში განხილულია ტოპოლოგიური და კვადრატული გარდაქმნების გამოყენება პოზიციური ამოცანების გადაწყვეტაში.

მხაზველობითი გეომეტრიის ამოცანების გადაწყვეტაში ტოპოლოგიური გამოყენების საფუძველი იმაში მდგომარეობს, რომ ეს გარდაქმნები ახორციელებენ სივრცის არათანაბარ დეფორმაციას, რაც გვაძლევს შესაძლებლობას ნებისმიერი ღია მრუდე წირი ავსახოთ წრფეზე, ხოლო შეკრული მარტივი წირი - წრეწირზე. ამოცანის გადაწყვეტა სრულდება დეფორმირებული ფიგურების გეგმილების მონაწილეობით, მიღებული შედეგის დაბრუნებით საწყის გეგმილებზე. ნათქვამიდან გამომდინარე, ტოპოლოგიური გარდაქმნის პრაქტიკული გამოყენებისათვის, აუცილებელია საწყისი და გარდაქმნილი სივრცეების შესაბამის წერტილთა ყოველი წყვილისათვის დამყარებული იყოს გრაფიკულად მოცემული შესაბამისობა. ასეთი შესაბამისობა შეიძლება ადვილად დამყარდეს ორთოგონალურად შეუღლებული სხივთა ძნულის წყვილით და ორი ურთიერთშესაბამისი გარდატეხის ზედაპირით. იმისდა მიხედვით ძნულთა და ურთიერთშესაბამის გარდატეხის ზედაპირების რომელ წყვილებს შევარჩევთ, მივიღებთ ტოპოლოგიური გარდაქმნების სხვადასხვა სახეებს. ასე, ტოპოლოგიური გარდაქმნა ცილინდრული გარდატეხის ზედაპირით, რომელიც ახორციელებს სივრცის არათანაბარ დეფორმაციას (კუმშვას, გაწელვას) **x** ღერძის პარალელური მიმართულებით, ნებისმიერი მოხაზულობის ბრუნვის ზედაპირი, რომლის ღერძი იგივე **x** ღერძის პარალელურია, შეიძლება

ავსახოთ სფეროზე. ასეთი ტოპოლოგია ბრუნვის ზედაპირის მერიდიანებს ასახავს წრეწირებზე - სფეროს მერიდიანებზე.

ამ გარდაქმნის გამოყენებით გადაწყვეტილია შემდეგი კონკრეტული ამოცანები:

- მოცემულია ნებისმიერი ფრონტალური მოხაზულობის ზედაპირი, რომელსაც გააჩნია მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსური კვეთები და პრიზმა. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი.
- მოცემულია ნებისმიერი ფრონტალური მოხაზულობის ზედაპირი, რომელსაც გააჩნია მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსური კვეთები და ჰორიზონტალურად პროექცირებადი სიბრტყე. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი.
- მოცემულია ელიფსური პარაბოლოიდი და ფრონტალურად პროექცირებადი ცილინდრი. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი.

კვადრატული გარდაქმნების გეომეტრიული ინტერპრეტაციების და არსის, აგრეთვე მხაზველობით გეომეტრიაში მათი გამოყენების გზების დასაბუთების მიზნით, ნაშრომში მოკლედ არის გადმოცემული ამ თემასთან მჭიდროდ დაკავშირებული სივრცის მოდელირების საკითხები.

ალგებრული ზედაპირების მოდელირება და პროექციულ მოდელში წარმოქმნილი გარდამქნების განხილვა ხორციელდება მოდელის სიბრტყეში ამ ზედაპირის ბიცენტრალური დაგეგმილების საფუძველზე. განხილულია ყველაზე ზოგადი შემთხვევა - **n** რიგის $\mathbf{F^n}$ ზედაპირის მოდელირება, საიდანაც, როგორც კერძო შემთხვევა, გამომდინარეობს კვადრიკების მოდელირებაც.

კვადრატული გარდაქმნების გამოყენება პოზიციური ამოცანების გადაწყვეტის გამარტივებაში გამომდინარეობს ამ გარდაქმნების თვისებებიდან, კერძოდ, ეს გარდაქმნები წრფეს ასახავენ კონიკაზე და შებრუნებით, კონიკას - წრფეზე, კვადრიკას - ახალ კვადრიკაზე, რომელიც უფრო მოსახერხებელია ამოცანის გადასაწყვეტად, ან სიბრტყეზე, უფრო ზუსტად, კვადრიკაზე, რომელიც დაშლილია ორ სიბრტყედ.

კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით გადაწყვეტილია შემდეგი პოზიციური ამოცანები:

- მოცემულია α ბრუნვის პარაბოლოიდი და პარაბოლოიდის ღერძზე მდებარე **T** წვეროს მქონე β ზოგადი სახის კონუსი, რომლის ფრონტალური მოხაზულობის მსახველები მართ კუთხეს შეადგენენ. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი.
- მოცემულია **x** ღერძის მქონე α ბრუნვის ცილინდრი და ცილინდრის ღერძზე მდებარე **T** წვეროს მქონე β ზოგადი სახის კონუსი, რომლის ფრონტალური მოხაზულობის მსახველები მართ კუთხეს შეადგენენ. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი.

- მოცემულია ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი და მასთან საერთო ღერძის მქონე ბრუნვის ზედაპირი, მაგალითად, ბრუნვის ელიფსოიდი. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი.

Resume

The work overviews development of geometry starting with the ancient time up to the present days, formulates general principles and trends of applied and constructive geometry.

Initially, geometry is a science about shapes and figures, their position, size and transformation. This definition completely adjusts the definition of the geometry as a science on space forms and their interrelation. The figure in geometry is considered as a space form; position and size are determined by the spatial relationship; and transformation in geometry is certain relation between the figure and shape. Modern geometry includes different mathematical theories, connected with it not only by their similarity (common spatial forms and relationships), but by the fact that they have been forming on the basis of geometry in its initial value and originated from analysis and generalization of geometry.

Modern descriptive geometry is a science, which methods are applied to the different subjects of science and engineering. Problems in descriptive geometry are solved graphically, which quantity and character are determined not only by the problem's complexity, but mainly by positional relationship of geometrical figures and projection plane, that can be changed by means of widely known classical methods of drawing's transformation and additional projection. Every such method has set of problems, which, if solved by its application, give the best results in the view of simplicity and adequacy of solution. Actually, these are problems which involve ruled surface and surface of rotation.

At the same time, there exists great group of problems which involve nonruled surface of the common type. In case such problem is solved by classical method of drawing's transformation, it needs a lot of graphical constructions and is often inaccurate. For example, construction of the line of intersection of two curved surfaces involves gauge curves. It is clear that for the simplification of solution it is better to avoid their construction and use a simpler way. Unfortunately, classical methods can't provide such transition.

Positive results can be provided by spatial transformation, in particular, collinear, topologic, quadratic.

Application of spatial transformations for the simplification of the problems' solution sets up a new method of descriptive geometry, which can be called method of spatial transformations. This method proceeds on the assumption that the considering figure is inseparably linked with the space where it is located, and as a result, having deformed the space we deform these figures as well, i.e. we reflect them on new figures. For example, transformations give opportunity to reflect curved surfaces of the second order on the simpler and more convenient for the problems' solution surfaces of rotation, in particular, sphere.

The work considers application of topologic transformations to the solution of the positional problems.

The main point of the application of topologic transformation to simplification of the problems' solution is that these transformations cause irregular deformation of the space, that enables reflecting of any open curve on the straight line, while closed graph - on the circle. Solution of the problem is being carried out in the transformed space with participation of projection of deformed figures. Then, the obtained result, by mean of inversion, is back to the initial projections. Proceeding from this, in order to enable practical application of topologic transformations, it is necessary to determine graphically set correspondence between each corresponding pair of points of initial and transformed spaces.

Such correspondence can be easily determined by two orthogonally conjugated net of rays and two mutually corresponding refraction surfaces.

Thus, by means of topologic transformation with the cylinder surface of refraction, which carries out irregular deformation of the space (compression, stretching), in the direction parallel with axis x, rotation surface with arbitrary contour and axis, parallel to the same axis x, can be reflected to the sphere. This transformation helps to solve the following problems:

- it is given a surface with arbitrary frontal outline, which has similar and similarly situated elliptical section and projecting on prism Π_2. Line of their intersection is constructed.
- The surface with arbitrary frontal outline is given, it has similar and similarly situated elliptical sections and horizontally projecting plane. Line of their intersection is constructed.
- Elliptical paraboloid and frontally projecting cylinder. Line of their intersection is constructed.

The short overview of issues of the space modeling in this chapter is aimed at the proving of geometric interpretation and main point of quadratic transformation, as well as the ways of their adaptation in applied geometry.

Modeling of algebraic surfaces located in space R_3 and following it transformations in the plane of projecting model are researched on the basis of bicentral projection of space on the model's plane. It should be said, that obtained results will be true for more general schemes got on the basis of both principles of construction of binary models R_3. The most general case was considered – modeling of the surfaces of n-order F^n, from which, as a particular case, follows modeling of quadric. Application of quadratic transformation for simplification of positional problems is based on the qualities of these transformations, in particular, quadratic transformations reflect map the line to conic and vise versa, conic to the line; spatial quadratic transformations reflect/map quadric to the convenient for the problem's solution quadric or on the plane or, rather, quadric split into two planes.

By means of quadratic transformation the further positional problems were solved:

- Paraboloid of rotation α and cone of general type β with vertex T on the axis of paraboloid, and the elements of frontal contour outline of which make straight angle are given. Construct the line of their intersection.

- Surface of cylinder of rotation α with axis, coinciding with axis x and cone of general type β with vertex T on the axis of cylinder and the elements of frontal contour outline of which make straight angle are given. Construct the line of their intersection.
- Surface of hyperbolic paraboloid and coaxial surface of rotation, for example, ellipsoid of rotation are given. Construct the line of their intersection.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

ნახაზების ნუსხა

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

თემის აქტუალობა

თანამედროვე გამოყენებითი გეომეტრია ყველა თავის მიმართულებასთან ერთად (გეომეტრიული მოდელირება, მხაზველობითი გეომეტრია, კონსტრუქციული გეომეტრია, საინჟინრო გრაფიკა და სხვ.) არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის ცოდნის სხვადასხვა დარგებში არსებულ კონკრეტული ობიექტების გარკვეული ჯგუფების ასახვას სიბრტყეზე.

მათემატიკური თვალსაზრისით გამოყენებითი გეომეტრია შეისწავლის როგორც თეორიულ, ისე კონკრეტულ გამოყენებითი ამოცანების გეომეტრიული გადაწყვეტის და თვალსაჩინოების ხერხებს. ამასთან ერთად, გამოყენებითი გეომეტრიის მიზანია ტექნიკური ამოცანები და ამ ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები.

ამრიგად, გამოყენებითი გეომეტრიის მათემატიკური და ტექნიკური მიდგომები და დეფინიციები ძალიან ახლოს არიან ერთმანეთთან, მაგრამ პირველი აკეთებს აქცენტს პრობლემის თეორიულ მხარეზე, ხოლო მეორე - კონკრეტული ტექნიკური ამოცანების რეალიზაციაზე.

შემოუსაზღვრავია გეომეტრიის გამოყენებების არეალი. ძნელი წარმოსადგენია თანამედროვე ცოდნის ტექნიკური დარგი გეომეტრიული მეთოდების და იდეების გარეშე.

სადისერტაციო ნაშრომში გადაწყვეტილია გამოყენებითი გეომეტრიის ზოგიერთი კონკრეტული პოზიციური ამოცანები სივრცითი (ტოპოლოგიური, კვადრატული) გარდაქმნების გამოყენებით.

ნაშრომის მიზანი და კვლევის ამოცანა

ნაშრომის მიზანია სივრცის გარდაქმნებით მხაზველობითი გეომეტრიის პოზიციური ამოცანების, კერძოდ, მეორე და მეოთხე რიგის მრუდწირული ზედაპირების და ზოგიერთი სხვა ზედაპირის თანაკვეთის წირის აგების იმ ხერხების შემოთავაზება, რომლებიც საგრძნობლად ამარტივებენ ამ ამოცანების გადაწყვეტას.

მეცნიერული სიახლე

- ნებისმიერი მოხაზულობისა ზედაპირისა და პრიზმის თანაკვეთის წირის აგება ტოპოლოგიური გარდაქმნის გამოყენებით;
- ნებისმიერი მოხაზულობისა ზედაპირის და პროექცირებადი სიბრტყის თანაკვეთის წირის აგება ტოპოლოგიური გარდაქმნის გამოყენებით;
- ელიფსური პარაბოლოიდისა და ცილინდრის თანაკვეთის წირის აგება ტოპოლოგიური გარდაქმნის გამოყენებით;
- ბრუნვის პარაბოლოიდისა და ზოგადი სახის კონუსის თანაკვეთის წირის აგება კვადრატული გარდაქმნის გამოყენებით;
- ბრუნვის ცილინდრისა და ზოგადი სახის კონუსის თანაკვეთის წირის აგება კვადრატული გარდაქმნის გამოყენებით;
- ჰიპერბოლური პარაბოლოიდისა და ბრუნვის ელიფსოიდის თანაკვეთის წირის აგება კვადრატული გარდაქმნის გამოყენებით.

კვლევის ობიექტი

გამოყენებითი გეომეტრიის (მხაზველობითი გეომეტრიის, კონსტრუქციული გეომეტრიის, საინჟინრო გრაფიკის და სხვ.) ძირითადი პრინციპები და მიმართულებები. მეორე რიგის ზედაპირების თანკვეთა, როგორც თეორიულ, ისე ტექნიკურ ფორმებში.

კვლევის მეთოდები

მდგომარეობს კონსტრუქციული გეომეტრიის, გეომეტრიული გარდაქმნების და გრაფიკული მეთოდების სისტემურ გამოყენებაში; აგრეთვე, ამ მეთოდების გამოყენებაში კონკრეტული ამოცანების გადასაწყვეტად.

თეორიული და პრაქტიკული ღირებულება

სადისერტაციო ნაშრომი როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული ხასიათისაა. გადაწყვეტილია გამოყენებითი გეომეტრიის ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანა სივრცითი გარდაქმნების დახმარებით, რომლებიც იძლევიან შესაძლებლობას გამოვიყენოთ ეს გარდაქმნები მეორე რიგის ზედაპირების გარკვეული ჯგუფების თანაკვეთის ამოცანების გადაწყვეტაში.

დისერტაციის შედეგები შეიძლება იყოს გამოყენებული პროექციული და მხაზველობითი გეომეტრიის სამეცნიერო კვლევებში, სტუდენტებისათვის სპეცკურსების და სემინარების ჩატარებაში. პრაქტიკული მხარე ისაა, რომ მიღებული რეზულტატები შეიძლება იყოს გამოყენებული ტექნიკური და კონსტრუქტორული ამოცანების გადაწყვეტაში.

შედეგების უტყუარობა.

ძირითადი თეორიული დასკვნების და დებულებების უტყუარობა დადასტურებულია მკაცრი მათემატიკური, დედუქციური მსჯელობებით და მტკიცებულებებით.

ნაშრომის ძირითადი დებულებები:

- გამოყენებითი გეომეტრია და გრაფიკული მეთოდების გამოკვლევა მათ ისტორიულ განვითარებაში.
- კონკრეტული პოზიციური ამოცანების გადაწყვეტა სივრცის ტოპოლოგიური, კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით.

ნაშრომის სტრუქტურა.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლისაგან, ორი თავისაგან, ზოგადი დასკვნებისაგან, გამოყენებული ლიტერატურის და ავტორის მიერ გამოქვეყნებული შრომების სიისაგან.

ნაშრომის მოკლე შინაარსი

ნაშრომის პირველ თავში მოცემულია გეომეტრიის განვითარების მოკლე მიმოხილვა, ჩამოყალიბებულია გამოყენებითი და კონსტრუქციული გეომეტრიის ზოგადი პრინციპები და მიმართულებები.

გეომეტრია თავისი პირვანდელი მნიშვნელობით არის მეცნიერება ფიგურებზე, მათი ნაწილების ურთიერთგანლაგებაზე, ზომებზე და, აგრეთვე, გარდაქმნებზე. ეს განსაზღვრა სავსებით ეთანხმება გეომეტრიის განსაზღვრას როგორც მეცნიერებას სივრცით ფორმებზე და მათ მიმართებებზე. მართლაც, ფიგურა, როგორც იგი განისაზღვრება გეომეტრიაში, არის სივრცითი ფორმა (ამიტომ გეომეტრიაში ამბობენ, მაგალითად, "ბირთვი" და არა "ბირთვის ფორმის ფიგურა"); განლაგება და ზომები განისაზღვრება სივრცითი მიმართებებით; და ბოლოს, გარდაქმნა, როგორც მას გეომეტრიაში განიხილავენ, აგრეთვე არის გარკვეული მიმართება ორ ფიგურას შორის - მოცემულსა და მის

ანასახს შორის. თანამედროვე, უფრო ზოგადი თვალსაზრისით, გეომეტრია მოიცავს სხვადასხვა მათემატიკურ თეორიებს, რომელთა გეომეტრიისადმი კუთვნილება განისაზღვრება არა მარტო ჩვეულებრივ სივრცით ფორმებთან და მიმართებებთან მათი საგნის მსგავსებით (თუმცა ზოგჯერ საკმაოდ შორეული), არამედ აგრეთვე იმითაც, რომ ისინი ისტორიულად ყალიბდებოდნენ და ყალიბდებიან გეომეტრიის პირვანდელი მნიშვნელობის საფუძველზე და თავის მსჯელობაში გამომდინარეობენ გეომეტრიის ანალიზიდან, განზოგადებიდან და სახეცვლილებიდან. ამ ზოგადი თვალსაზრისით გეომეტრია მჭიდროდ არის გადახლართული მათემატიკის სხვა დარგებთან და მისი საზღვრები არ არის მკაფიოდ დადგენილი.

გამოყენებით გეომეტრიაში ამოცანები გრაფიკულად სრულდება და მათი გადაწყვეტის დროს გრაფიკული აგებების სირთულე დამოკიდებულია არა მხოლოდ ამოცანის სირთულეზე, არამედ დიდწილად განპირობებულია ფიგურის და გეგმილთა სიბრტყეების ურთიერთგანლაგებით, რომლის შეცვლა ხერხდება ეპიურის გარდაქმნის საყოველთაოდ ცნობილი კლასიკური მეთოდების და დამატებითი დაგეგმარების გამოყენებით. ყოველ ასეთ მეთოდს გააჩნია ამოცანათა ჯგუფი, რომელთათვისაც მის გამოყენებას საუკეთესო შედეგი აქვს ამოცანის გადაწყვეტის სიმარტივის და სიზუსტის თვალსაზრისით. ძირითადად, ეს არის ამოცანები, რომლებშიც მონაწილეობენ წრფოვანი და ბრუნვის ზედაპირები.

ამასთან ერთად, არსებობს ამოცანების დიდი ჯგუფი, რომლებშიც მონაწილეობენ არაწრფოვანი ზედაპირები. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტა ეპიურის გარდაქმნის კლასიკური მეთოდების გამოყენებით მოითხოვს დიდი მოცულობის აგებების ჩატარებას და ხშირად არაზუსტიც არის. ასე, მაგალითად, ორი მრუდწირული ზედაპირის თანკვეთის წირის აგებაში მონაწილეობენ ლეკალური წირები. ცხადია, სასურველია ავიცილოთ მათი აგება და გადავიდეთ ამოცანის ისეთ გადაწყვეტაზე,

რომელიც შედარებით უფრო მარტივად მოხერხდება. სამწუხაროდ, კლასიკური მეთოდები ვერ უზრუნველყოფენ ასეთი გადასვლის შესაძლებლობას. დადებითი შედეგის მიღწევა შესაძლებელი გახდა კოლინეარული, ტოპოლოგიური, კვადრატული და სივრცის სხვა გარდაქმნების დახმარებით.

ამოცანების ამოხსნაში სივრცის გარდაქმნების გამოყენებამ დასაბამი დაუდო მხაზველობითი გეომეტრიის ახალ მეთოდს, რომელსაც შეიძლება უწოდოთ სივრცის გარდაქმნების მეთოდი. ეს მეთოდი ეყრდნობა იმ მოსაზრებას, რომ განსახილველი ფიგურები არ არიან ხისტები და შესაძლებელია მათი დეფორმირება იმ სამგანზომილებიანი სივრცის გარდაქმნით, რომელშიდაც ეს ფიგურები მდებარეობენ. სახელდობრ, კოლინეარული გარდაქმნების თვისებები გვაძლევენ შესაძლებლობას ავსახოთ წრფოვანი ზედაპირები მაგეგმილებელ ზედაპირებზე, ხოლო ამოცანაში მონაწილე მეორე რიგის მრუდწირული ზედაპირები - შედარებით მარტივ და ამოხსნისათვის მოხერხებულ ბრუნვის ზედაპირებზე, კერძოდ სფეროზე. ამასთან, მოცემულ ფიგურასა და მის ანასახს შორის მყარდება გარკვეული შესაბამისობა, რომელიც განსაზღვრავს სივრცის კონკრეტულ გარდაქმნას. ასეთი გარდაქმნის არსებობა გვაძლევს შესაძლებლობას ამოცანაში მონაწილე დანარჩენი ფიგურების ანასახებიც ავაგოთ და გამოვიყენოთ ეს მეთოდი ამოცანის ამოხსნის გასამარტივებლად.

მეორე თავში განხილულია ტოპოლოგიური და კვადრატული გარდაქმნების გამოყენება პოზიციური ამოცანების გადაწყვეტაში.

მხაზველობითი გეომეტრიის ამოცანების გადაწყვეტაში ტოპოლოგიური გამოყენების საფუძველი იმაში მდგომარეობს, რომ ეს გარდაქმნები ახორციელებენ სივრცის არათანაბარ დეფორმაციას, რაც გვაძლევს შესაძლებლობას ნებისმიერი ღია მრუდე წირი ავსახოთ წრფეზე, ხოლო შეკრული მარტივი წირი - წრეწირზე. ამოცანის გადაწყვეტა სრულდება დეფორმირებული ფიგურების გეგმილების

მონაწილეობით, მიღებული შედეგის დაბრუნებით საწყის გეგმილებზე. ნათქვამიდან გამომდინარე, ტოპოლოგიური გარდაქმნის პრაქტიკული გამოყენებისათვის, აუცილებელია საწყისი და გარდაქმნილი სივრცეების შესაბამის წერტილთა ყოველი წყვილისათვის დამყარებული იყოს გრაფიკულად მოცემული შესაბამისობა. ასეთი შესააბამისობა შეიძლება ადვილად დამყარდეს ორთოგონალურად შეუღლებული სხივთა ძნულის წყვილით და ორი ურთიერთშესაბამისი გარდატეხის ზედაპირით. იმისდა მიხედვით ძნულთა და ურთიერთშესაბამის გარდატეხის ზედაპირების რომელ წყვილებს შევარჩევთ, მივიღებთ ტოპოლოგიური გარდაქმნების სხვადასხვა სახეებს. ასე, ტოპოლოგიური გარდაქმნა ცილინდრული გარდატეხის ზედაპირით, რომელიც ახორციელებს სივრცის არათანაბარ დეფორმაციას (კუმშვას, გაწელვას) **x** ღერძის პარალელური მიმართულებით, ნებისმიერი მოხაზულობის ბრუნვის ზედაპირი, რომლის ღერძი იგივე **x** ღერძის პარალელურია, შეიძლება ავსახოთ სფეროზე. ასეთი ტოპოლოგია ბრუნვის ზედაპირის მერიდიანებს ასახავს წრეწირებზე - სფეროს მერიდიანებზე. ამ გარდაქმნის გამოყენებით გადაწყვეტილია ამოცანა ნებისმიერი მოხაზულობის ბრუნვის ზედაპირის და პრიზმის თანაკვეთის წირის აგებაზე.

ამ თავში გადაწყვეტილია შემდეგი კონკრეტული ამოცანები:

- მოცემულია ნებისმიერი ფრონტალური მოხაზულობის ზედაპირი, რომელსაც გააჩნია მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსური კვეთები და პრიზმა. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (იხ. ნახ. 8);
- მოცემულია ნებისმიერი ფრონტალური მოხაზულობის ზედაპირი, რომელსაც გააჩნია მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსური კვეთები და ჰორიზონტალურად პროექცირებადი სიბრტყე. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (იხ. ნახ. 9);.

- მოცემულია ელიფსური პარაბოლოიდი და ფრონტალურად პროექცირებადი ცილინდრი. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (იხ. ნახ. 10).

კვადრატული გარდაქმნების გეომეტრიული ინტერპრეტაციების და არსის, აგრეთვე მხაზველობით გეომეტრიაში მათი გამოყენების გზების დასაბუთების მიზნით, მოკლედ არის გადმოცემული ამ თემასთან მჭიდროდ დაკავშირებული სივრცის მოდელირების საკითხები.

ალგებრული ზედაპირების მოდელირება და პროექციულ მოდელში წარმოქმნილი გარდამქნების განხილვა ხორციელდება მოდელის სიბრტყეში ამ ზედაპირის ბიცენტრალური დაგეგმილების საფუძველზე. განხილულია ყველაზე ზოგადი შემთხვევა - **n** რიგის $\mathbf{F^n}$ ზედაპირის მოდელირება, საიდანაც, როგორც კერძო შემთხვევა, გამომდინარეობს კვადრიკების მოდელირებაც.

კვადრატული გარდაქმნების გამოყენება პოზიციური ამოცანების გადაწყვეტის გამარტივებაში გამომდინარეობს ამ გარდაქმნების თვისებებიდან, კერძოდ, ეს გარდაქმნები წრფეს ასახავენ კონიკაზე და შებრუნებით, კონიკას - წრფეზე, კვადრიკას - ახალ კვადრიკაზე, რომელიც უფრო მოსახერხებელია ამოცანის გადასაწყვეტად, ან სიბრტყეზე, უფრო ზუსტად, კვადრიკაზე, რომელიც დაშლილია ორ სიბრტყედ.

ამ თავის დასკვნით ნაწილში კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით გადაწყვეტილია შემდეგი პოზიციური ამოცანები:

- მოცემულია α ბრუნვის პარაბოლოიდი და პარაბოლოიდის ღერძზე მდებარე **T** წვეროს მქონე β ზოგადი სახის კონუსი, რომლის ფრონტალური მოხაზულობის მსახველები მართ კუთხეს შეადგენენ. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (ნახ. 14).
- მოცემულია **x** ღერძის მქონე α ბრუნვის ცილინდრი და ცილინდრის ღერძზე მდებარე **T** წვეროს მქონე β ზოგადი სახის

კონუსი, რომლის ფრონტალური მოხაზულობის მსახველები მართ კუთხეს შეადგენენ. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (ნახ. 15).

- მოცემულია ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი და მასთან საერთო ღერძის მქონე ბრუნვის ზედაპირი, მაგალითად, ბრუნვის ელიფსოიდი. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (ნახ. 16).

თავი 1

გამოყენებითი და კონსტრუქციული გეომეტრიის ზოგადი პრინციპები და მიმართულებები

პირველ თავში ზოგადი სახით მოცემულია გეომეტრიული მოდელირების ზოგადი პრინციპები; განსაკუთრებით აღნიშნულია მხაზველობითი გეომეტრიისა და გრაფიკული მეთოდების როლი ტექნიკური და გამოყენებითი შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

გამოყენებითი გეომეტრიის ისტორიული განვითარების ფონზე ნაჩვენებია გამოყენებითი ამოცანების არსი და მნიშვნელოვნება.

1.1. გამოყენებითი გეომეტრია და გეომეტრიული მოდელირების ზოგადი პრინციპები

დასაშვებია ერთი და იგივე გეომეტრიული თეორიის სხვადასხვა გამოყენება, სხვადასხვა განმარტება (განხორციელება, მოდელი ან ინტერპრეტაცია). რაიმე თეორიის ყოველი გამოყენება სხვა არაფერია, თუ არა მისი ზოგიერთი დასკვნების გამოყენება რაიმე მოვლენის შესაბამის სფეროში.

1.1.1. გამოყენებითი გეომეტრიის ამოცანები და პრინციპები

ყველა მათემატიკური თეორიის საერთო თვისებას წარმოადგენს მისი სვადასხვა გამოყენება. მაგალითად, არითმეტიკული შესაბამისობების რეალიზება სრულდება საგნების სხვადასხვა კრებულებისათვის; ერთი და იგივე განტოლება ხშირად სრულიად განსხვავებულ მოვლენებს აღწერს. მათემატიკა განიხილავს მოვლენის მხოლოდ ფორმას და არა შინაარს, ფორმის თვალსაზრისით კი თვისობრივად განსხვავებული მოვლენები ხშირად მსგავსი აღმოჩნდება. მათემატიკის და კერძოდ გეომეტრიული

მოდელირების გამოყენების მრავალსახეობა განპირობებულია მისი აბსტრაქტული თვისების გამო. იგულისხმება, რომ ობიექტების რომელიმე სისტემა (მოვლენათა არე) ახდენს თეორიის განხორციელებას, თუკი ამ არეში ობიექტების შესაბამისობა, ამ თეორიის ენაზე შეიძლება აღწერილი იქნას ისე, რომ თეორიის ყოველი მტკიცება გამოხატავს ამა თუ იმ ფაქტს, რომელსაც ადგილი აქვს განსახილველ არეში. კერძოდ, თუ თეორია იგება აქსიომების რაიმე სისტემაზე, მაშინ ამ თეორიის განმარტება მდგომარეობს მისი ცნებების რომელიღაც ობიექტებთან და მათ მიმართებებთან ისეთ შესაბამისობაში, რომლითაც სრულდება აქსიომების პირობები ამ ობიექტებისათვის.

ევკლიდეს გეომეტრია შეიქმნა სინამდვილის ფაქტების ასახვის მიზნით. მისი ჩვეულებრივი ინტერპრეტაცია, სადაც წრფეებად იგულისხმება დაჭიმული ძაფები, მოძრაობად-მექანიკური გადაადგილება და ა.შ., წინ უსწრებდა გეომეტრიულ მოდელირებას როგორც მათემატიკურ თეორიას.

თანამედროვე მათემატიკაში მიღებული სივრცის ფორმალურ-მათემატიკური განსაზღვრება სიმრავლის ცნებიდან გამომდინარეობს. სივრცე განისაზღვრება როგორც რაღაც ელემენტების (”წერტილების”) სიმრავლე, იმ პირობით, რომ ამ სიმრავლეში განსაზღვრულია ზოგიერთი დამოკიდებულება, ჩვეულებრივი სივრცითი დამოკიდებულებების მსგავსად. ფერების სიმრავლე, ფიზიკური სისტემის მდგომარეობათა სიმრავლე, (0,1) არეზე განსაზღვრულ ყველა უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე და ა.შ. ქმნიან სივრცეს, სადაც წერტილებს წარმოადგენენ ფერები, მდგომარება, ფუნქციები. უფრო ზუსტად ეს სიმრავლეები გაიგება როგორც სივრცეები, თუ მასში განსაზღვრულია შესაბამისი დამოკიდებულები, მაგალითად, მანძილი წერტილებს შორის, აგრეთვე ის თვისებები და დამოკიდებულები, რომლებიც მათი საშუალებით განისაზღვრება. ამგვარად, მანძილი ფუნქციებს შორის შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც მათი სხვაობების აბსოლიტური სიდიდეების მაქსიმუმი: $\max|f(x)-g(x)|$. ფიგურა განისაზღვრება როგორც მოცემული სივრცის ნებისმიერ

წერტილთა სიმრავლე. ზოგჯერ სივრცე ელემენტთა სიმრავლეებისაგან შედგენილ სისტემას წარმოადგენს. მაგალითად, პროექციულ გეომეტრიაში მიღებულია წერტილების, წრფეების და სიბრტყეების განხილვა როგორც ტოლი მნიშვნელობის, ერთმანეთთან "კუთვნილების" დამოკიდებულებით დაკავშირებული საწყისი გეომეტრიული ობიექტები.

1.1.2. თანამედროვე გეომეტრიის ძირითადი მეთოდები და მიმართულებები

დამოკიდებულებების ძირითადი ტიპები, რომლებსაც თანამედროვე გეომეტრიაში სხვადასხვა კომბინაციებით მივყავართ "სივრცეების" ყველა მრავალსახეობებზე, მდგომარეობს შემდეგში.

1) კუთვნილების და ჩართვის დამოკიდებულება: წერტილი ეკუთვნის სიმრავლეს, და ერთი სიმრავლე არის მეორეს ნაწილი. თუ მხედველობაში მივიღებთ მხოლოდ ამ დამოკიდებულებს, მაშინ სიმრავლეში არ არის "გეომეტრია", ის ვერ იქნება სივრცე. მაგრამ თუ გამოყოფილია ზოგიერთი სპეციალური ფიგურები(წერტილთა სიმრავლე), მაშინ სივრცის "გეომეტრია" შეიძლება განისაზღვროს წერტილების ამ ფიგურებთან ბმის კანონებით. ამ როლს ასრულებს კუთვნილების აქსიომები აფინურ, პროექციულ, ორთოგონალურ გეომეტრიებში.

2) მეორე ძირითადი პრინციპი ამა თუ იმ სივრცის განსაზღვრისა და შესწავლისათვის არის კოორდინატების შემოღება. მრავალსახეობა ეწოდება ისეთ ტოპოლოგირ სივრცეს, რომლის ყველა წერტილის მიდამოში შეიძლება შემოვიღოთ კოორდინატები, ანუ მიდამოს წერტილებს ურთირთცალსახად და ურთიერთუწყვეტად შევუსაბამოთ n ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილი $x_1,x_2,\ldots,x_n$ სისტემები. n არის მრავალსახეობის განზომილების რიცხვი. უმრავლეს გეომეტრიულ თეორიებში შესწავლილი სივცეები მრავალსახეობებს წარმოადგენენ; ჩვეულებრივ, უმარტივესი გეომეტრიული ფიგურები (მონაკვეთები, მრუდეებით შემოსაზღვრული

ზედაპირები და ა.შ.) მრავალსახეობის ნაწილებია. თუ კი ყველა კოორდინატთა სისტემას შორის შეიძლება გამოიყოს ისეთი, რომ ერთი კოორდინატები გამოისახება მეორეთი დიფერენცირებადი ან ანალიზური ფუნქციებით, მაშინ მიიღება ე.წ. გლუვი (ანალიზური) მრავალსახეობა. ეს ცნება განაზოგადებს წარმოდგენას გლუვ ზედაპირზე.

3) გადაადგილების, როგორც ერთი ფიგურის მეორედ გარდაქმნის, განზოგადოებულ გაგებას მივყავართ სხვადასხვა სივრცეების განსაზღვრის ზოგად პრინციპამდე. როდესაც სივრცედ იგულისხმება ელემენტების (წერტილების) სიმრავლე, სადაც მოცემულია ურთიერთცალსახა გარდაქმნების ჯგუფი ამ სიმრავლისა თავის თავზე. ასეთი სივრცის ”გეომეტრია” მდგომარეობს ფიგურების იმ თვისებების შესწავლაში, რომლებიც ამ ჯგუფის გარდაქმნებით უცვლელია. ამიტომ ასეთი გეომეტრიით ფიგურები შეიძლება ჩაითვალოს ”ტოლად”, თუ ერთი გადადის მეორეში მოცემული ჯგუფის გადაქმნის საშუალებით.

ასეთი ”გეომეტრიის” აპარატის შესაქმნელად გამოიყენება უწყვეტ ჯგუფთა გარდაქმნის თეორია. შესაძლებელია სხვა, შინაარსობრივად ეკვივალენტური, ხედვა, რომლის თანახმადაც მოიცემა არა სივრცის გარდაქმნა, არამედ კოორდინატების გარდაქმნა, ამასთან შეისწავლება ფიგურების ის თვისებები, რომლებიც ერთნაირად გამოისახებიან კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემებში. ამან გამოყენება პოვა ფარდობითობის თეორიაში, რომელიც საჭიროებს ფიზიკის კანონების ერთნაირად გამოსახვას კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემაში.

4) სივრცის წარმოდგენის სხვა ზოგადი პრინციპი, რომელიც ”მანძილის” განზოგადოებული ცნებიდან გამომდინარეობს მოცემულია ბ.რიმანის (1854) მიერ. რიმანის აზრით, სივრცე გლუვი მრავალსახეობაა, სადაც მოცემულია მანძილის გაზომვის კანონი, უსასრულოდ მცირე ბიჯებით, ანუ მოიცემა წირის რკალის დიფერენციალი როგორც წერტილის კოორდინატის და მისი დიფერენციალების ფუნქცია. ეს კ.გაუსის მიერ განსაზღვრული ზედაპირების გეომეტრიის განზოგადოებას წარმოადგენს, სადაც

ზედაპირების თვისებების შესწავლა ხდება მასზე წირების გაზომვით. უმარტივესი შემთხვევაა ე.წ. რიმანის სივრცე, სადაც უსასრულოდ მცირათათვის სამართლიანია პითაგორას თეორემა (ე.ი. ყოველი წერტილის მიდამოში შეიძლება შემოვიღოთ კოორდინატები ისე, რომ ამ წერტილში რკალის სიგრძის დიფერენციალის კვადრატი უდრიდეს კოორდინატების დიფერენციალების კვადრატების ჯამს; ნებისმიერ კოორდინატებში კი ის გამოისახება კვადრატული ფორმით). გამოდის, რომ ასეთი სივრცე არის ევკლიდეს უსასრულოდ მცირესათვის, მაგრამ მთლიანობაში შეიძლება არც იყოს ევკლიდეს, რადგანაც მრუდე ზედაპირი მხოლოდ უსასრულოდ მცირეში შეიძლება დაყვანილ იქნეს სიბრტყეზე შესაბამისი სიზუსტით. ევკლდესა და ლობაჩევსკის გეომეტრია რიმანის გეომეტრიის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს. მანძილის ცნების განზოგადებამ მიგვიყვანა მეტრიკული სივრცის ცნებამდე, როგორც ელემენტების ისეთ სიმრავლეზე, რომელზეც მოცემულია "მეტრიკა", ანუ ელემენტების ყოველ წყვილს შეესაბამება რიცხვი, მანძილი მათ შორის. ეს იდეა მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფუნქციონალურ ანალიზში და საფუძვლად უდევს ზოგიერთ მნიშვნელოვან გეომეტრიულ თეორიებს, ისეთებს, როგორიცაა არაგლუვი ზედაპირების შიდა გეომეტრია და რიმანის გეომეტრიის შესაბამისი განზოგადოება.

5) მრავალსახეობის უსასრულოდ მცირე არეებზე ბ.რიმანის მიერ განსაზღვრული "გეომეტრიის" შერწყმით გარდაქმნების ჯგუფით განსაზღვრულ "გეომეტრიასთან" მიგვიყვანა (ე.კარტანი, 1922-25) ისეთი სივრცის ცნებაზე, რომელშიც გარდაქმნები მოცემულია მხოლოდ უსასრულოდ მცირე არეებზე; სხვა სიტყვებით, აქ გარდაქმნა კავშირს ამყარებს მრავალსახეობის უსასრულოდ ახლო ნაწილებთან: ერთი ნაწილი გარდაიქმება მეორე უსასრულოდ მცირე ნაწილად. ამიტომაც საუბრობენ სივრცეებზე ამა თუ იმ ტიპის "ბმულებით". კერძოდ, სივრცები "ევკლიდეს ბმულებით" რიმანის აზრით. შემდგომი განზოგადოება უკავშირდება სივრცის, როგორც მრავალსახეობის ცნებას, რომელზეც მოცემულია

„ობიექტების“ რაღაც „ველი“, რომელიც შეიძლება იყოს კვადრატული ფორმა, ზმულობის განმსაზღვრელი სიდიდეების ერთობლიობა, ესა თუ ის ტენზორი და ა.შ. ამას შეიძლება მივაკუთვნოთ ეგრეთწოდებული სივრცეების განფენაც.

6) აქსიომატური მეთოდი გამოიყენება უკვე გამზადებული თეორიების გასაფორმებლად, ან სპეციალური სიმრავლეებით გამოყოფილი ზოგადი ტიპის სივრცეების განსაზღვრისათვის. თუ კონკრეტული სივრცეების ამა თუ იმ ტიპს განსაზღვრავენ ისე, რომ მის თვისებს აქსიომების სახით აყალიბებენ, მაშინ სარგებლობენ ან კოორდინატებით, ან მეტრიკით ან სხვ. აქსიომატური თეორიის არაწინააღმდეგობრიობას ამოწმებენ მოდელის მითითებით, სადაც ხდება მისი რეალიზაცია, როგორც ეს პირველად გაკეთდა ლობაჩევსკის გეომეტრიაში. თვით მოდელი აიგება აბსტრაქტული მათემატიკური ობიექტებისაგან, ამიტომ ნებისმიერი გეომეტრიული თეორიის ”საბოლოო დასაბუთება” იწყება საერთოდ მათემატიკის საფუძვლებიდან, ის არ იქნება საბოლოო და მოითხოვს გაღრმავებას (იხ.აქსიომატური მეთოდი).

ჩამოთვლილი პრინციპები სხვადასხვა შეხამებებით და ვარიაციებით ქმნის გეომეტრიული თეორიების მრავალსახეობას. თითოეული მათგანის მნიშვნელობა და მისი ამოცანების მიმართ ყურადღების ხარისხი განპირობებულია ამ ამოცანების შინაარსითა და მიღებული შედეგებით, მისი კავშირებით სხვა გეომეტრიების თეორიებთან, მათემატიკის სხვა დარგებთან და ტექნიკის ამოცანებთან.

1.1.3. გეომეტრიული მოდელირების ზოგადი პრინციპები

გეომეტრიული მოდელირება – ამოუწურავი თემაა, რომელიც მრავალი მიმართულებით ვითარდება.

არსებობს გეომეტრიული მოდელირების განმარტების უამრავი ვერსია, რომლებიც შემდეგში მდგომარეობს: გეომეტრიული მოდელი –

გეომეტრიული სიმბოლოების მეშვეობით გამოიხატული გარე სამყაროს რომელიმე მოვლენათა კლასის მიახლოებული აღწერილობაა. გეომეტრიული მოდელი – გარე სამყაროს შეცნობის, მართვისა და პროგნოზირებისა ერთ-ერთი მეთოდია. გეომეტრიული მოდელის ანალიზი შესაძლებლობას იძლევა ჩავწვდეთ შესასწავლ მოვლენათა არსს.

თუ მოდელი სრულად იყო განსაზღვრული, ანუ მოცემული იყო მისი ყველა პარამეტრი, მაშინ დაკვირვებების მონაცემებიდან თეორიული შედეგების გადახრების დადგენა იძლევა შემდგომი გადახრების შეფასების საშუალებას პირდაპირი ამოცანის ამოხსნისას. თუ გადახრები სცილდება დაკვირვებების სიზუსტის ფარგლებს, მაშინ მოდელის მიღება არ შეიძლება.

ხშირად, მოდელის აგებისას, ზოგიერთი მისი მახასიათებლები განუსაზღვრელი რჩება. ამოცანებს, რომლებშიც მოდელის მახასიათებლები (პარამეტრული, ფუქციონალური) ისე განისაზღვრება, რომ გამომავალი ინფორმაცია, დაკვირვებების სიზუსტის ფარგლებში, შეიძლება შეუტოლდეს შესწავლილ მოვლენათა დაკვირვებების შედეგებს, უწოდებენ შექცეულ ამოცანებს.

თუ გეომეტრიული მოდელი ისეთია, რომ ყოველი შერჩეული მახასიათებლების ეს პირობები არ სრულდება, მაშინ განხილულ მოვლენათა გამოკვლევისათვის მოდელი არ გამოდგება. მათემატიკური მოდელის შეფასებისათვის პრაქტიკული კრიტერიუმის გამოყენება საშუალებას იძლევა გაკეთდეს დასკვნა იმ დებულებათა სისწორეზე, რომლებიც შესწავლას დაქვემდებარებულ (ჰიპოთეზურ) მოდელს უდევს საფუძვლად. ეს მაკრო და მიკროსამყაროს, უშუალოდ მიუწვდომელ მოვლენათა, შესწავლის ერთადერთ მეთოდს წარმოადგენს.

ნებისმიერი ობიექტის გეომეტრიული მოდელირება, ისევე, როგორც ზოგადად მათემატიკური მოდელირება, გულისხმობს 4 ძირითად ეტაპს:

1. გეომეტრიული მოდელის აგება.

2. მოდელის გამოკვლევა (ანალიზი).

3. მოდელის ვარგისობის შესწავლა.

4. მოდელის კორექტირება.

გეომეტრიული მოდელის ორ სახეობას განასხვავებენ: გრაფიკულს (თეორიულს) და ექსპერიმენტულს.

გრაფიკული მოდელები აიგება ობიექტთა თეორიული კანონზომიერების ბაზაზე; ხოლო ექსპერიმენტული მოდელი მიიღება გამოსაკვლევი ობიექტის თვისებების გამოვლენის მეშვეობით.

გეომეტრიული მოდელირების მეთოდს, რომელსაც გარე სამყაროს გამოკვლევები დაჰყავს მათემატიკურ ამოცანებამდე, მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს გამოკვლევის სხვადასხვა მეთოდთა შორის, განსაკუთრებით ეგმ-ის გამოჩენის შემდეგ. ის მეცნიერებისა და ტექნიკის სფეროში რთული ამოცანების ამოსახსნის ასევე მოვლენათა პროგნოზირებისათვის, ოპტიმალურ რეჟიმში მომუშავე ახალი ტექნიკური საშუალებების პროექტირების შესაძლებლობას იძლევა. გეომეტირულ მოდელებმა თავი გამოიჩინეს როგორც მართვის მნიშვნელოვანმა საშუალებებმა. ისინი მეცნიერებების სხვადასხვა დარგებში გამოიყენება, აუცილებელ მექანიზმად იქცნენ ეკონომიური დაგეგმარების სფეროში და მნიშვნელოვან ელემენტს წარმოადგენენ მართვის ავტომატიზირებულ სისტემებში. ყველაფერმა ამან ხელი შეუწყო ახალი მიმართულების შექმნას, სახელწოდებით-კომპიუტერული გრაფიკა.

1.2. გამოკვლევის გრაფიკული მეთოდები და მხაზველობითი გეომეტრია

სხეულთა მოძრაობის ტრაექტორიის, კერძოდ ციურ მნათობთა ორბიტის, ელექტრულ და მაგნიტურ ველთა ნაკადების, ზედაპირის დონის, იზოთერმული, იზობარული, იზოკლინიკური ნაკადების და ზედაპირების მოძიება, ყველაფერი ეს – მექანიკის, ასტრონომიისა და ფიზიკის ის ძირითადი ამოცანებია, რომლებიც მჭიდროდაა

დაკავშირებულნი გეომეტრიასთან. XIX საუკუნის დასაწყისში, ლაგრანჟის, ლაპლასისა და ფურიეს შრომების წყალობით ამ მეცნიერებებმა მიიღეს ამჟამად ცნობილი, საბოლოო სახე. ყველა ეს მეცნიერები ძალიან კარგად იყვნენ განსწავლული გეომეტრიაში; მათ, ახალი გამოყენებითი ცოდნის შემქნელთა, მეთოდებში გეომეტრია იმოდენა როლს ასრულებდა, რომ ფრანგ მეცნიერთა ყოფიერებაში გაუჩინარდა სიტყვა “მათემატიკა” და ადგილი დაეთმო უფრო საპატიო წოდებას “გეომეტრი”. გეომეტრიაში უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის გამოყენების პირველი სისტემატიზებული ჩამოყალიბება წარმოგვიდგინა მონჟმა თავის ნაშრომში “**Fenillines d’analyse appliqué á géométrie**” (**Paris, 1795**). მონჟის მიერ დამუშავებული საერთო სქემით დღესაც ადგენენ ანალიზის კურსების თავებს, რომლებიც ეძღვნება მის გამოყენებას გეომეტრიაში, ასე რომ ეს სქემა ყველასთვისა ცნობილი, ვინც სწავლობდა უმაღლეს მათემატიკას.

1.2.1. გ. მონჟის გამომსახველობითი გეომეტრია

გამომსახველობითი გეომეტრია. მონჟის სახელთან დაკავშირებულია ასევე სხვა გეომეტრიული დისციპლინების სრულყოფა, კერძოდ მხაზველობითი გეომეტრიის**,** ანუ გამომსახველობითი გეომეტრიის როგორც მას უფრო სწორად უწოდებენ გერმანელები (“**Darstellende Geometrie**”). გამომსახველობითი გეომეტრიის ამოცანა მდგომარეობს მოცემული ობიექტის ისეთ გრაფიკულ წარმოსახვაში, როდესაც შესაძლებელი ხდება ამ ობიექტის ზუსტი გეომეტრიული ფორმის წარმოდგენა. ხშირად საჭირო ხდება ასეთი გამოსახულებების შექმნა სიბრტყეზე (ქაღალდის ფურცელზე, ტილოზე, ქვაზე, კედელზე). ამის შესაბამისად, გამომსახველობითი გეომეტრია წარმოადგენს უშუალოდ სიბრტყეზე საგანთა ასახვის თეორიას; სწორედ, სივრცითი ობიექტების სიბრტყეზე ასახვის ამოცანაში მდგომარეობს სირთულე. გეომეტრიის არც ერთი დარგი არ შექმნილა პრაქტიკული

ამოცანებიდან გამომდინარე ისე, როგორც გამომსახველობითი გეომეტრია. ბუნებრივი ობიექტების წარმოსახვის პირველ მცდელობებს უკავშირებენ ისტორამდელ პერიოდს; უკვე ანტიკურ სამყაროში მიაღწია ხელოვნებამ სრულყოფის მაღალ დონეს, მაგრამ ის რჩებოდა მხოლოდ და მხოლოდ ხელოვნებად. მხოლოდ იმ მომენტიდან, როგორც კი ცხოვრების პირობებმა მოითხოვა გამოსახულების სიზუსტე, ჩაისახა სპეციალური მეცნიერება – გრაფიკულ გამოსახულებათა თეორია. ამ თეორიის საფუძვლები, ბუნებრივია, მხედველობითი აღქმის საშუალებათა შორის – ოპტიკაში, კერძოდ – გეომეტრიულ ოპტიკაში უნდა ვეძებოთ. აქ, სინათლის სხივის სწორხაზოვნებას აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა. თუ ობიექტი იმყოფება თვალსა და რომელიმე სიბრტყეს, მაგალითად კედელს შორის, მაშინ თვალი წარმოადგენს ცენტრს, რომლიდანაც სხივთა კონით ხდება საგანის პროექცირდება სიბრტყეზე. ამ გარემოებამ, რომელზეც მიგვითითა ევკლიდემა თავის "ოპტიკაში", აქცია ცენტრალური გეგმილი მთელი გამომსახველოთი გეომეტრიის საფუძვლად. პირველი, მნიშვნელოვანი ნაბიჯების გადადგმა ამ მიმართულებით, რომაელ არქიტექტორსა და ინჟინერს ვიტრუვიუს უკავშირდება, რომელმაც, ჯერ კიდევ ქრისტიანულ ერამდე, ათ წიგნად დაწერა ტრაქტატი არქიტექტურის შესახებ. მაგრამ ვიტრუვიუს იდეებმა ვერ მოახდინეს დიდი გავლენა გამომსახველობითი გეომეტრიის განვითარებაზე. მისი ხელახალი განვითარება დაიწყო აღორძინების ეპოქაში, სადაც მნიშვნელოვან როლს ასრულებს სამი სახელი: იტალიური რენესანსის უდიდესი წარმომადგენელი ლეონარდო და ვინჩი (1452-1519), გერმანელი მხატვარი დიურერი (1471-1528) და ფრანგი არქიტექტორი, ინჟინერი და მათემატიკოსი დეზარგი (1593-1662). თავის ტრაქტატში ფერწერის შესახებ ("**Trattato della pittura**"), რომელიც 1701 წელს დაიბეჭდა, ლეონარდო მათემატიკურ ფორმაში იძლევა მითითებებს იმის შესახებ თუ როგორ უნდა იქნას გამოყენებული ცენტრალური დაგეგმილება დამახინჯებებისაგან თავისუფალი

გამოსახულების მისაღებად; ამ იდეებმა ასახვა ჰპოვა დისციპლინაში სახელწოდებით სწავლება პერსპექტივის შესახებ, რომელიც მოგვიანებით ფართოდ განვითარდა. დიურერი თავის ნაშრომში "**Untersuchungen der Messungen**" (1525) სარგებლობს არა ცენტრალური, არამედ პარალელური გეგმილით, რომელიც ცენტრალური დაგეგმილების კერძო სახეს წარმოადგენს. სივრცეში სხეულის მდებარეობის განსაზღვრისათვის მოცემული უნდა იყოს მისი ყოველი წერტილის სამი კოორდინატი, ანუ გეგმილები სამ სიბრტყეზე. მაგრამ, თუ ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ სხეულთა ფორმა და მის მდებარეობას სივრცის ამა თუ იმ ნაწილში არ აქვს მნიშვნელობა, მაშინ საკმარისია სხეულის ყველა წერტილის გეგმილი მხოლოდ ორ სიბრტყეზე. ამით სარგებლოდა დიურერიც. თუმცა მისთვის კოორდინატთა იდეა ცნობილი არ იყო. ის ახდენდა სივრცითი წირის (მაგალითად, ხრახნილი სპირალი) დაგეგმილებას ჰორიზონტალურ ("**Grundriss**") და ვერტიკალურ ("**Aufriss**") სიბრტყეზე; ორივე გეგმილი ერთობლიობაში იძლევა წირის სრულ და ზუსტ გამოსახულებას; თუ ცნობილია წირის გეგმილები, მაშინ შესაძლებელია მისი წარმოდგენა. მაგრამ ორი სიბრტყის გამოყენების აუცილებლობა ეწინააღმდეგება მთავარ ამოცანას – მივიღოთ სივრცითი ობიექტის გამოსახულება ერთ სიბრტყეზე. დეკარტის მეგობარი და მიმდევარი დეზარგი, რომელიც შეისწავლიდა პერსპექტივებს, სივრცით ობიექტს უკავშირებდა სამ ურთიერთპერპენდიკულარულ სიბრტყეს, როგორც ეს ჩვეულებრივ კეთდება ანალიზურ გეომეტრიაში, და ახდენდა დაგეგმილებას ერთ-ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე (ე. წ. პირველი გეგმილი). ამის შემდეგ ის ახდენდა ობიექტის დაგეგმილებას გამოსახულების სიბრტყეზე მის პირველ გეგმილსა და ღერძებთან ერთად. ამ შემთხვევაში გამოსახულების სიბრტყეზე მიიღება ორი გეგმილის – თვით ამ ობიექტისა და მისი პირველი გეგმილისა; რომელთა მიხედვით შესაძლებელია გამოსახული ობიექტის ზუსტად აღდგენა; განვითარების შემდგომ ამ მეთოდმა მიიღო სახელწოდება –

აქსონომეტრია. შემდგომი პერიოდების გეომეტრები ავითარებდნენ ამ იდეებს, რომლებსაც იყენებდნენ ცალკეული ობიექტების გამოსასახავად. მაგრამ, რადგანაც თავისი საწყისი სქემით აქსონომეტრია ძალიან რთულის შთაბეჭდილებას ტოვებდა, ამიტომ ის ნაკლებად გამოიყენებოდა, და გამომსახველობითი გეომეტრია ვითარდებოდა პერსპექტივისა და ორი გეგმილის მიმართულებით.

მონჟის დამსახურება სამმაგია. პირველ რიგში, მან გადაწყვიტა ერთ სიბრტყეზე გამოსახულების აგების საკითხი, რისთვისაც მეორე (ვერტიკალური) გეგმილი გადაჰქონდა პირველ ჰორიზონტალურ სიბრტყეში; ამასთანავე, მეორე სიბრტყეს მასზე დატანილ გეგმილთან ერთად 90^0 -ით აბრუნებდა ორი სიბრტყის გადაკვეთის წრფის გარშემო; ამგვარად, ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მიღებული ორი გეგმილი ქმნის ე. წ. "ეპიურს", რომლის მიხედვითაც შესალებელია გამოსახული ობიექტის ზუსტად აღდგენა; სწავლება ეპიურის აგების და "წაკითხვის" შესახებ წარმოადგენს მონჟის მხაზველობითი გეომეტრიის არსს. მეორე, მრავალი სახის ცალკეულ ობიექტთან მუშაობისას მიღებული ყველა მასალა მონჟმა მთლიანად მოაქცია ერთ, მდგრად სისტემაში. მესამე, ზოგადგეომეტრიული გამოკვლევის მიზნით მან სცადა ამ გრაფიკული მეთოდების გამოყენება: რადგან გამოსახული ობიექტი სრულად განისაზღვრება ეპიურით, მაშინ ამ ობიექტის გეომეტრიული გამოკვლევა შეიძლება დაყვანილ იქნეს ეპიურის შესწავლაზე.

თუმცა, ამ ბოლო იდეას არსებითი შედეგი არ მოჰყოლია.

მონჟის წიგნი მხაზველობითი გეომეტრიის სახელმძღვანელოს წარმოადგენდა პარიზის პოლიტექნიკური სკოლისათვის, ამ წიგნის გავლენა ამჟამადაც ემჩნევა მხაზველობითი გეომეტრიის ყველა სახელმძღვანელოს.

ამრიგად, XVIII საუკუნის ბოლოსათვის გაფორმდა და საბოლოო სახე მიიღო გეომეტრიული აზროვნების იმ მიმართულებებმა, რომლებიც წარმოიშვა აღორძინების ეპოქაში და ექვსი საუკუნის

განმავლობაში ვითარდებოდა. აყვავების ამ მეორე ეპოქაში, ახალი გეომეტრიის მნიშვნეოვანი თვისებები მდგომარეობდა იმავე საკითხების სრულიად ახალი მეთოდებით გამოკვლევაში, რომლებზეც მუშაობდნენ ბერძენი გეომეტრები პრინციპი „**geometria geometrice**" უქმდება; პირიქით, გეომეტრიაში ფართო გამოყენებას პოულობს ორი ახალი მათემატიკური მეცნიერება – ალგებრა და უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვა. გეომეტრიული კვლევის ახალ მეთოდებს აქვს აბსტრაქტული ხასიათი, ისინი ეწინააღმდეგება ინტუიციას. ამასთან, ისინი კონკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად უფრო ზოგად ხერხებს იძლევიან. ალგებრის გეომეტრიზაციადან ხდება გეომეტრიის ალგებრაზიაციაზე გადასვლა, და მხოლოდ გამომსახველობით გეომეტრიაში წარმოებს აგება ძველი, წმინდა გეომეტრიული მეთოდებით. რაც უფრო ღრმად ვითარდება ეს მეთოდები, მით უფრო ფართოდ გამოყენება პრაქტიკაში. შემთხვევითი არაა, რომ სწორედ საფრანგეთში, რევოლუციის და ლოზუნგებისათვის ბრძოლის პერიოდში, ხდება ძირითადი გეომეტრიული დისციპლინების სრულყოფა. მაშინ მონჟი რევოლუციის სათავეში მყოფთა რიცხვს ეკუთვნოდა; ის იაკობინელი და რევოლუციური ხელისუფლების მინისტრი იყო. თავისი "მხაზველობითი გეომეტრიის" წინასიტყვაობაში მონჟი შემდეგნაირად აყალიბებდა სამეცნიერო განათლების ამოცანებს: "იმისათვის, რომ ერი განთავისუფლდეს უცხოეთის მრეწველობაზე დამოკიდებულებისაგან, აუცილებელია, პირველ რიგში, აღზრდა მიმართული იქნას ისეთი საგნების შესწავლაზე, რომლებიც საჭიროებენ სიზუსტეს და ჩვენი სპეციალისტები უნდა მივაჩვიოთ ყველა შესაძლო ზუსტი ინსტრუმენტების გამოყენებას".

1.2.2. თანამედროვე მხაზველობითი გეომეტრია და ტექნიკური შინაარსის ამოცანების გრაფიკული ამოხსნები

თანამედროვე მხაზველობითი გეომეტრია არის მეცნიერება, რომლის მეთოდები ფართოდ გამოიყენება მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგში.

მათემატიკური თვალსაზრისით, მხაზველობითი გეომეტრია არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის სხვადასხვა სივრცეების (ნებისმიერი განზომილებისა და მეტრიკის) კონსტრუქციული (გრაფიკული) ასახვის საშუალებებს ქვესივრცეებზე, კერძოდ კი – სიბრტყეებზე. ამასთანავე, დიდ ინტერეს იწვევს ურთიერთცალსახა ასახვები, რომელთათვისაც ანასახი საწყისი სივრცის ჰომეომორფულია, სხვა სიტყვებით, შეისწავლება სივრცეთა კონსტრუქციული სიბრტყითი მოდელების აგების მეთოდები.

ცნობილია, რომ მხაზველობითი გეომეტრიის ყოველ მეთოდს გამოყენების განსაზღვრული ტექნიკური სფერო გააჩნია. ზოგიერთი მეთოდისათვის ეს სფერო უფრო ფართოა, ზოგიერთისთვის კი უფრო ვიწრო, უნივერსალური მეთოდი არ არსებობს და არც შეიძლება არსებობდეს.

ბოლო ათწლეულების განმავლობაში შემუშავდა სიბრტყეზე სივრცის ასახვის უამრავი მეთოდი, მათგან მრავალი შეიქმნა პრაქტიკული საჭიროებიდან გამომდინარე. ტექნიკის სწრაფი განვითარების გამო სავარაუდოა, რომ ეს მეთოდი გამოყენებას ჰპოვებს განსაზღვრული ტექნიკური შინაარსის ამოცანებისათვის. სივრცის მოდელირების ახალი მეთოდების დამუშავება დღემდე გრძელდება და ცხადია, კიდევ გაგრძელდება.

ზემოთქმული უფლებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ თანამედროვე მხაზველობითი გეომეტრიისათვის აქტუალურ საკითხს წარმოადგენს განსაზღვრულ ალგორითმს დაქვემდებარებული სივრცეთა

კონსტრუქტიული მოდელების აგების განზოგადოებული მეთოდების დამუშავება.

აქ არსებობს ორი მიმართულება. შესაძლებელია მოვიძიოთ მოდელების აგების საერთო პრინციპები, რომლებიც მიიღება, პირველი, პროექციული მეთოდებით და მეორე, აქსიომატურად. პროექციული მეთოდების განზოგადოების პირველი მცდელობა განხორციელებული იყო ე. მიულერის მიერ. მხაზველობითი გეომეტრიის ყველა ძირითადი მეთოდი გაერთიანდა ასახვის ორ პრინციპში: ორი გამოსახულების პრინციპითა და ორი კვალის პრინციპით.

თანამედროვე მხაზველობითი გეომეტრია ვითარდება ორი ძირითადი მიმართულებით. ერთის მხრივ, მხაზველობითი გეომეტრია, როგორც მეცნიერება, რომელიც ადრე თამაშობდა დამხმარე როლს ხაზვის კურსის დასასაბუთებლად, იქცა ზოგადტექნიკურ მეცნიერებად, რომელიც პოულობს გამოყენებას საინჟინრო საქმესა და ტექნიკის ყველა თანამედროვე მიმართულებაში. მეორეს მხრივ, გაძლიერდა ამ მეცნიერების მათემატიკური ბაზა და მხაზველობით გეომეტრიაში ჩატარებული მრავალი გამოკვლევა უკვე სამართლიანად შეიძლება ჩაითვალოს მათემატიკურად. მხაზველობით გეომეტრიაში კიდევ უფრო ფართოდ გამოიყენება პროექციული, წრფივი, მრავალგანზომილებიანი და არაევკლიდური გეომეტრიის აპარატები.

ეს ორი მიმართულება კი არ ეწინააღმდეგება, არამედ ავსებენ და ამდიდრებენ ერთმანეთს. მხაზველობითი გეომეტრიის მრავალ და მნიშვნელოვან ნაშრომებში ეს ორი მიმართულება მჭიდრო ურთიერთკავშირშია.

თანამედროვე მხაზველობითი გეომეტრია მჭიდრო კავშირშია პროექციულ გეომეტრიასთან. ეს კავშირი ვლინდება მხაზველობითი გეომეტრიის ამოცანების, პროექციული გეომეტრიის მეთოდების (კერძოდ, პროექციული გარდაქმნებით სიბრტყეზე) გამოყენებით ამოხსნისას. ფართო გაგებით მხაზველობითი გეომეტრია, სინთეზური

პროექციული გეომეტრიის კონსრუქციულ განშტოებას წარმოადგენს, რომელიც შეისწავლის სხვადასხვა სივრცეების პროექციულ კავშირებს ამავე სივრცეების სიბრტყულ მოდელებთან. სინამდვილეში, თუ მხაზველობითი გეომეტრიის მიზანია სივრცის სიბრტყეზე სხვადასხვა ასახვების შესწავლა, მაშინ ეს მათემატიკური თვალსაზრისით, სხვა არაფერია, თუ არა სივრცესა და მის სიბრტყითი მოდელებს შორის პროექციული (კერძოდ პერსპექტიული) კავშირის შესწავლა.

ყოველივე ამან გააძლიერა ინტერესი სიბრტყეზე სივრცის პროექციული გარდაქმნების (კოლინეაცია და კორელაცია სივრცეში) და მათი სიბრტყეზე ასახვის მიმართ. აღსანიშნავია, რომ სივრცის პროექციული გარდაქმნები კარგადაა შესწავლილი და ფართოდ გამოიყენება ტექნიკური და თეორიული ამოცანების ამოხსნისას.

თანამედროვე გამოყენებითი გეომეტრია თავისი მიმართულებებით (მხაზველობითი გეომეტრია, საინჟინრო გრაფიკა; გეომეტრიული პროგრამირება და ა. შ.) წარმოადგენს მეცნიერებას, რომლის მეთოდები გამოიყენება ტექნიკის სხვადასხვა დარგების ობიექტებისათვის.

მათემატიკური თვალსაზრისით, ეს შეიძლება დაყვანილი იქნას სხვადასხვა სივრცეების სიბრტყეზე ასახვის მეთოდების შესწავლაზე.

ტექნიკური თვალსაზრისით, ეს არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის სიბრტყეზე როგორც მატერიალური ობიექტების, ასევე ამ ობიექტებთან დაკავშირებული პროცესებისა და მოვლენების გამოსახვის რაციონალურ მეთოდებს. ცნობილია, რომ მხაზველობითი გეომეტრიის ყოველ მეთოდს აქვს გამოყენების განსაზღვრული სფერო. ზოგიერთი მეთოდისათვის სფერო უფრო ფართოა, ზოგიერთისთვის კი უფრო ვიწრო, რადგან უნივერსალური მეთოდი არ არსებობს და არც შეიძლება არსებობდეს. რა თქმა უნდა, ყოველი მეთოდი ნებისმიერი სივრცითი ობიექტის გამოსახვის საშუალებას იძლევა. მაგრამ ყოველთვის არაა

რაციონალური. მაგალითად, დედამიწის ზედაპირის გამოსახვა, მონჟის მეთოდით, იქნება ძალიან რთული და შრომატევადი.

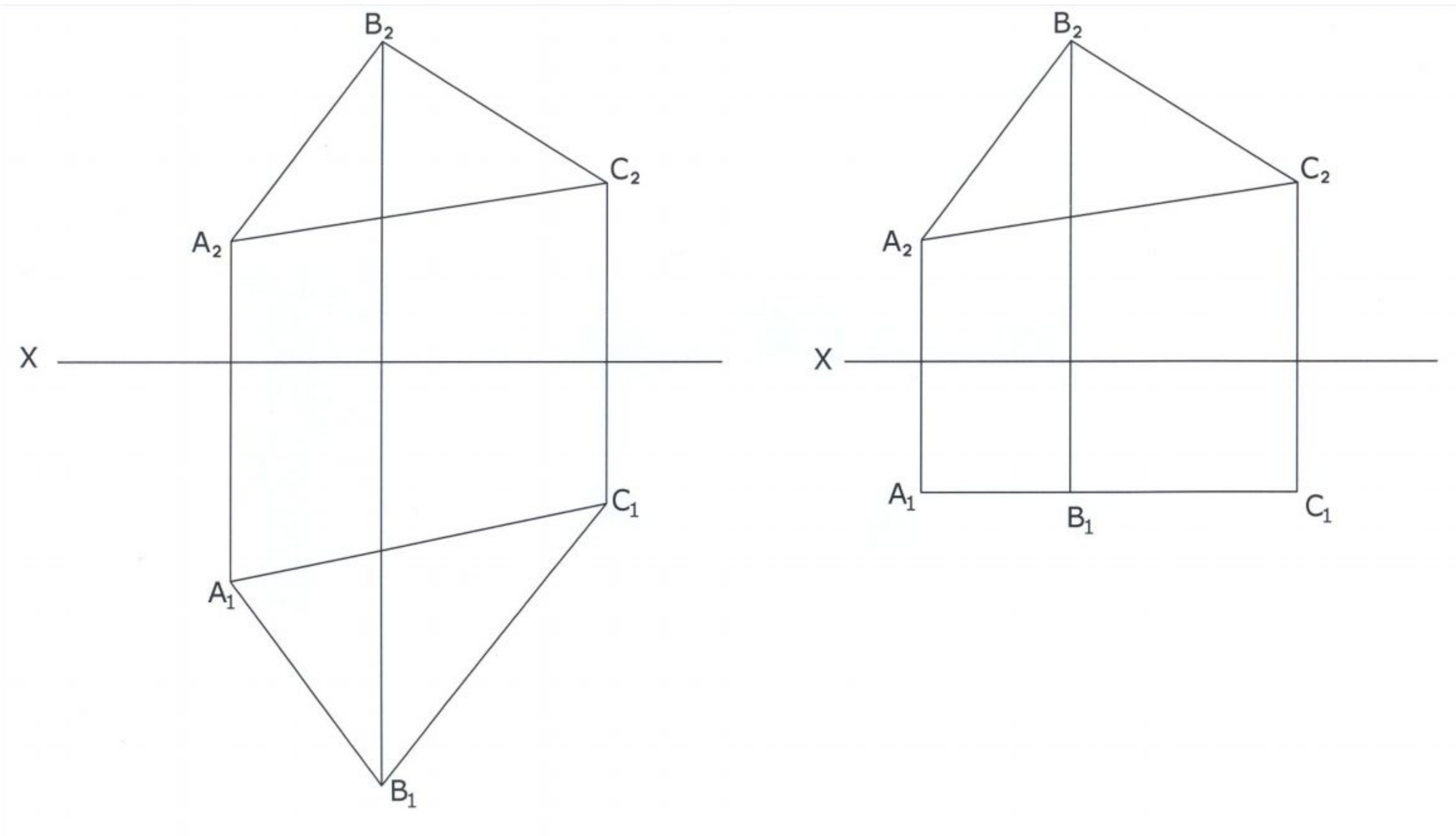
ამგვარად, მათემატიკური და ტექნიკური მიდგომა ერთმანეთთან ახლოსაა, მაგრამ პირველი აქცენტს ამახვილებს საკითხის თეორიულ მხარეზე, ანუ მის ინტერესს წარმოადგენს სივრცის სრულად ასახვა, სივრცითი ელემენტების გეომეტრიული მრავალსახეობები, მათი ინციდენციები და ა.შ., მეორე კი ყურადღებას ამახვილებს კონკრეტულ ტექნიკურ ფორმებსა და პროცესებზე.

1.2.3. გეომეტრიული ამოცანები აგებაზე, მათი სირთულე და ხასიათი

მხაზველობით გეომეტრიაში ამოცანები იხსნება გრაფიკულად. გეომეტრიულ აგებების რაოდენობა და ხასიათი განისაზღვრება არა მხოლოდ ამოცანის სირთულით, არამედ ფიგურისა და გეგმილის სიბრტყის ურთიერთგანლაგებით.

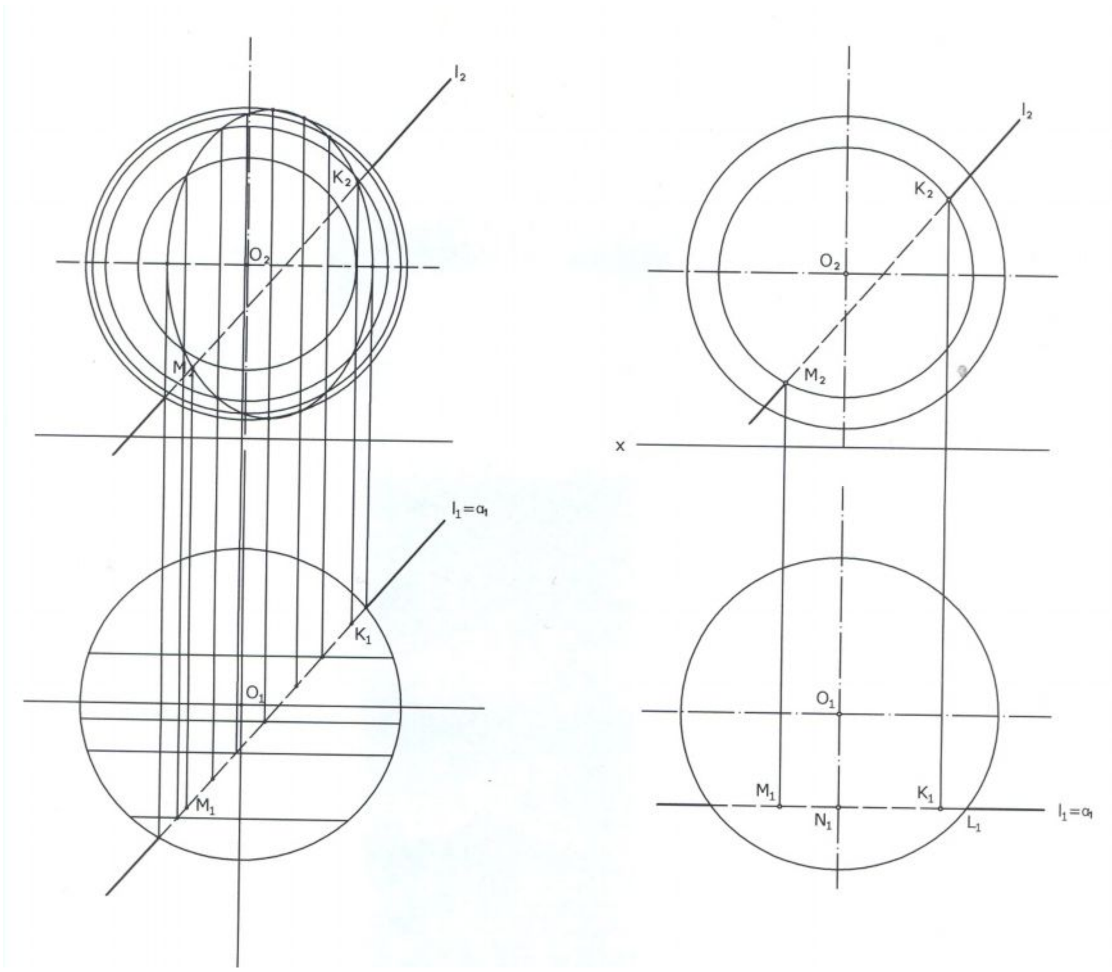
ურთიერთპერპენდიკულარულ სიბრტყეებზე ორთოგონალური დაგეგმილებისას, ამ სიბრტყეების მიმართ ფიგურის ნებისმიერად მდებარეობა, იძლევა ისეთ პროექციებს, რომელთა გამოყენება მოუხერხებელია კონკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად.

მართლაც, **ABC** სამკუთხედის $\mathbf{A_1B_1C_1}$ და $\mathbf{A_2B_2C_2}$ ორთოგონალური გეგმილები (ნახ. 1) არ გვაძლევს საშუალებას ვიმსჯელოთ მისი გვერდების სიგრძეებზე, კუთხეების სიდიდეზე და სხვა გეომეტრიულ მახასიათებლებზე. სამკუთხედის სიბრტყე რომელიმე გეგმილის სიბრტყის პარალელური (ჩვენს შემთხვევაში V-სიბრტყის პარალელული, (ნახ. 1,ბ) რომ ყოფილიყო, მაშინ იგივე (ორთოგონალური) გეგმილის გამოყენებისას ის გეგმილდება V-სიბრტყეზე ნატურალური განზომილებებით. ფრონტალური გეგმილი ნახ. 1,ბ იძლევა საშუალებას განვსაზღვროთ სამკუთხედის ყველა პარატმეტრი, რაც შეუძლებელია 1,ა ნახაზით დამატებითი აგებების გარეშე.



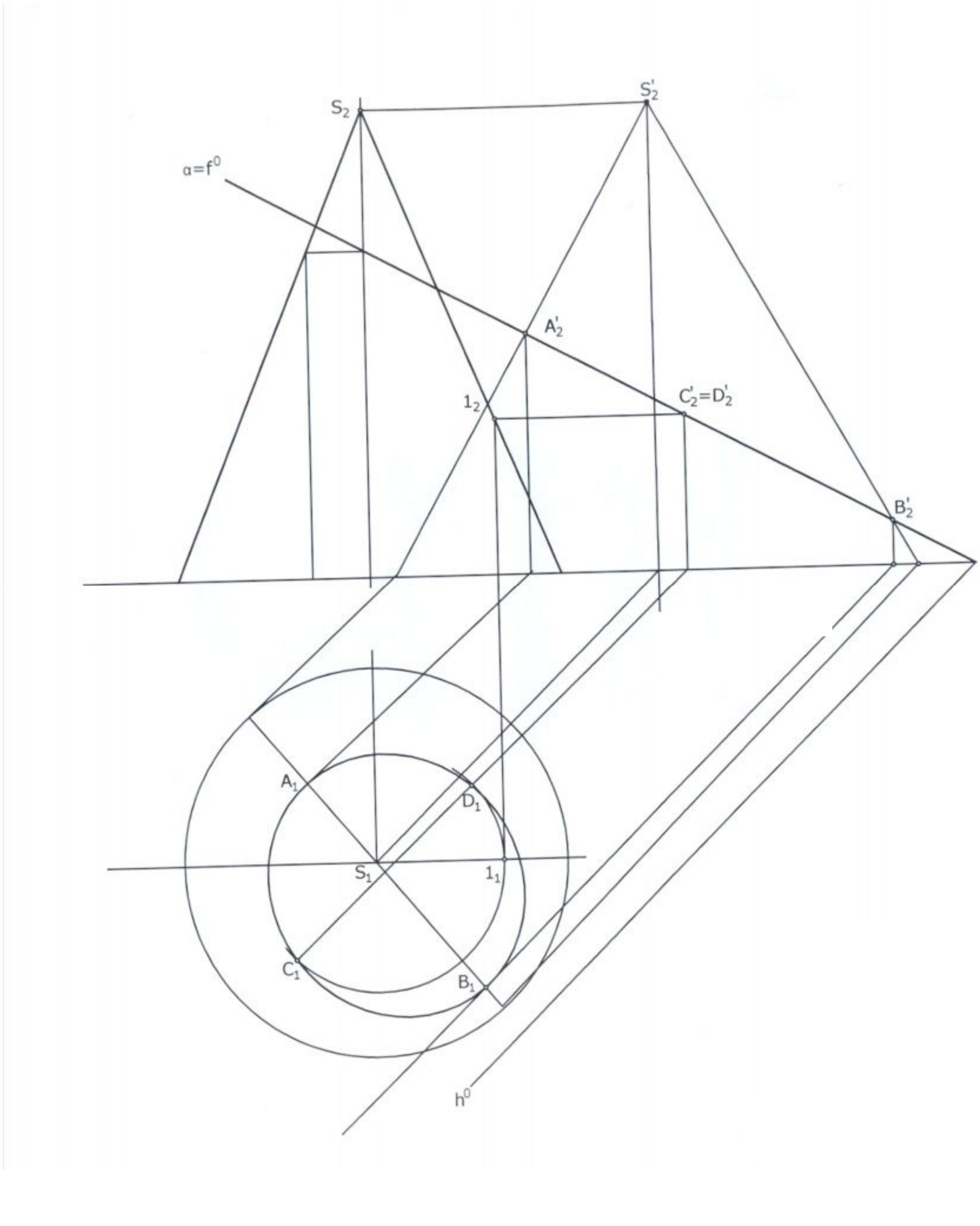
ა) ბ)

ნახ. **1.** ფიგურისა და გეგმილთა სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების სახეები.



ა)　　　　　　　　　　　　　　ბ)

ნახ. **2.** წრფისა და სფეროს ზედაპირის შეხვედრის წერტილების განსაზღვრის ვარიანტები.



ნახ**. 3.** წრიული მართი კონუსისა და მკვეთი სიბრტყის ორთოგონალური გეგმილები**.**

შეიძლებოდა უამრავი მაგალითების მოყვანა, რომლებიც გვიჩვენებდა, რომ ობიექტისა და მისი გეგმილების სიბრტყეების ურთიერთგანლაგება არსებით გავლენას ახდენს მეტრიკული ამოცანების ამოხსნის სიმარტივეზე.

ცნობილია, რომ პოზიციური ამოცანების ამოხსნის ხელსაყრელობა ასევე დამოკიდებულია ობიექტისა და მისი საპროექციო სიბრტყეების ურთიერთგანლაგებაზე.

ამის დასტურად, მაგალითის სახით განვიხილოთ ამოცანა წრფისა და სფეროს ზედაპირის შეხვედრის წერტილის განსაზღვრის შესახებ (ნახ, 2,ა და 2,ბ).

ნახ. 2,ა-ზე, პასუხის მისაღებად საჭიროა აგებათა დიდი რაოდენობის განხორციელება (ნახ. 2,ა-ზე ნაჩვენებია საჭირო აგებათა მხოლოდ ნაწილი). აქედან გამომდინარე, საპროექციო ობიექტისა და სიბრტყითი გეგმილების ურთიერთმდებარეობის პირობები გავლენას ახდენენ გრაფიკულ აგებათა ხასიათსა და რაოდენობაზე.

ნახ. 2,ბ-ზე ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას გრაფიკულ აგებათა მინიმალური რაოდენობით. ამოცანა დაიყვანება შემდეგზე: ვიპოვოთ $\mathbf{l_2}$-ის გადაკვეთის $\mathbf{M_2}$ და $\mathbf{K_2}$ წერტილები ($\mathbf{O_2} \,|\mathbf{N_1L_1}$) წრეწირთან.

მხაზველობითი გეომეტრიის სახელმძღვანელოებში ხშირადაა ნახსენები საპროექციო ობიექტის “ხელსაყრელი” ან “არახელსაყრელი” (“რაციონალური” ან “არარაციონალური”) მდებარეობა; ამასთანავე, მიმართებებით “ხელსაყრელი” ან “არახელსაყრელი” ახასიათებენ ასასახ ობიექტს. ეს სამართლიანია ურთიერთპერპენდიკულარულ სიბრტყეებზე ორთოგონალური დაგეგმილებისას. ამ შემთხვევაში გეგმილის სახე და მდგომარეობა დამოკიდებულია ობიექტის მდებარეობაზე მისი საპროექციო სიბრტყეების მიმართ.

ცხადია, რომ ყველა ჩამოთვლილ შემთხვევაში ფიგურის “ხელსაყრელი” ან “არახელსაყრელი” მდებარეობა აზრს კარგავს, რადგან ფიგურის მდებარეობა, რომელიც არახელსაყრელია ორთოგონალური

დაგეგმილებისას, შესაძლებელია მოხერხებული იყოს სხვა ხერხის ან სხვა მიმართულების დაგეგმილების გამოყენებისას.

ნახ. 3-ზე ნაჩვენებია მართი წრიული კონუსისა და მკვეთი $\alpha(\mathbf{h^0};\mathbf{f^0})$ სიბრტყის ორთოგონალური გეგმილები. ცხადია, ორთოგონალური გეგმილის გამოყენებით, კვეთის განსაზღვრისათვის α-სიბრტყის მდებარეობა არ არის ხელსაყრელი; ამავე დროს, თუ მოვახდენთ α-სიბრტყისა და **S**-კონუსის დაგეგმილებას $\mathbf{\Pi}_2$-სიბრტყეზე ჰორიზონტალური მიმართულებით, მივიღებთ ახალ ფრონტალურ გეგმილს, რომელიც ხელსაყრელია ამოცანის ამოსახსნელად. ამიტომ, შემდგომში არ ვისაუბრებთ ფიგურის "ხელსაყრელ" ან "არახელსაყრელ" მდებარეობაზე, არამედ ვისაუბრებთ მის გეგმილებზე, რომლებსაც ჩავთვლით მოხერხებულად იმ შემთხვევაში, თუ ისინი ფიგურის ფორმისა და ზომების ნათლად წარმოდგენის საშუალებას გვაძლევენ და ასევე ამარტივებენ დასმული ამოცანის ამოხსნას.

ნახ. 1-3 ჩანს, რომ მოცემული გეომეტრიული ობიექტების გეგმილის ხელსაყრელი სახისას ამოცანები იოლად იხსნება, და რთულდება გეგმილის არახელსაყრელი სახისას. ბუნებრივია, ისმის კითხვა: როგორ მივიღოთ ხელსაყრელი გეგმილი კონკრეტული ამოცანის ამოსახსნელად?

ქვემოთ ნაჩვენებია, გეგმილების აგების სხვა ხერხები და მეთოდები, რომლითაც მარტივდება მხაზველობითი გეომეტრიის ის ამოცანები, რომელ ამოხსნა არახელსაყრელია ორთოგონალური დაგემილებით.

გარდაქმნით ორთოგონალურმა გეგმილებმა უნდა მიიღოს ისეთი ახალი სახე, რომელიც მოგვცემს საშუალებას ამოვხსნათ ამოცანა მინიმალური გრაფიკული აგებებით.

ახალი გეგმილების მიღების შესაძლებლობები, ე. წ. დამატებითი მეთოდები, ჯერ კიდევ გ. მონჟის მიერ იყო განხილული, რომელიც მონაკვეთის სიგრძისა და ბრტყელი ფიგურის სახის განსაზღვრისათვის

სარგებლობდა ბრუნვის მეთოდით. ზოგიერთ ამოცანაში ამ მიზნით ის ცვლიდა გეგმილის ერთ სიბრტყეს და მიუთითა ახალი ორთოგონალური გეგმილების მიღების საშუალება ორ სიბრტყეზე, რომლებიც ნებისმიერი კუთხით იკვეთება. მოცულობითი საგნების სიბრტყეზე გამოსახვის მონჟის მეთოდი ურთიერთპერპენდიკულარული სიბრტყეების ერთ სიბრტყესთან შეთავსებაში მდგომარეობს.

შემდგომში ბრუნვის და გეგმილის სიბრტყეების შეცვლის მეთოდები კარგად დამუშავდა და ფართოდ გამოიყენებოდა მხაზველობითი გეომეტრიის სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნისას.

ეს მეთოდები სრულად ჩამოაყალიბა ვ. ი. კურდიუმოვმა, რომელმაც აჩვენა ზოგიერთი ამოცანის ორი მეთოდის (ბრუნვის და გეგმილების სიბრტყეთა ცვლის) შეთავსებით ამოხსნის თეორიული შესაძლებლობა და პრაქტიკული მიზანშეწონილობა.

30-იან წლებში ს. მ. კოლოტოვმა ჩამოაყალიბა სპეციალურად შერჩეულ სიბრტყეზე ირიბკუთხა და ცენტრალური დაგეგმილების ძირითადი პრინციპები, რომელიც დამხმარე დაგეგმილების მეთოდად იწოდება.

შემუშავებულია დამხმარე გეგმილთა აგების საშუალებათა მთელი რიგი (რ. მ. მიმინის, ვ. პ. ლევინის, ლ. ს. სკრიპოვის, მ. მ. იუდიცკის, ს. ვ. მიხაილოვის, ნ. ტ. ჩუვიკოვისა და სხ. შრომები). აღსანიშნავია ქართველი გეომეტრების წვლილი – კ. ს. ყიფშიძე, ი. ს. ჯაფარიძე, ე. ა. მჭედლიშვილი, ა. ს. შავგულიძე, გ. ა. ვაჩნაძე, ო. გ. თოიძე, ი. ე. ხატისკაცი, გ. გ. წულეისკირი, გ. მ. ცეცხლაძე, ნ. ა. დარახველიძე, ს. დ. ბურჭულაძე და სხვ.

1.3. გამოყენებითი გეომეტრიის კლასიკური მეთოდები; დამხმარე დაგეგმილების მეთოდი

1.3.1. სხვადასხვა მეთოდების შეფასება და მათი გამოყენების მიზანშეწონილობა

გამოყენებითი (მხაზველობითი) გეომეტრიის ამოცანების ამოხსნის მრავალი სხვადასხვა ხერხი და მეთოდი არსებობს.

მხაზველობითი გეომეტრიის ამოცანების ამოხსნა მით უფრო უკეთესია, რამდენადაც ნაკლებია მასში დამხმარე აგებათა რაოდენობა. გრაფიკული აგებათა რაოდენობების დასადგენად სარგებლობენ გეომეტროგრაფიკული მეთოდით.

გეომეტრიული აგებების სიმარტივისა და სიზუსტის ობიექტური შეფასების ერთ-ერთ პირველი მცდელობა ეკუთვნის ე. ლემუანს (**Lemoine E., Geometrographie on la simplicite reille des constructions geometrignes. Paris, 1897**).

გეომეტროგრაფიის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ნებისმიერი ნახაზის შესრულება იშლება ელემენტარულ ოპერაციებად (სახაზავის წერტილთან მიტანა, წრფის გავლება, მოცემულ წერტილში ფარგლის წვერის დასმა, წრეწირის შემოხაზვა და ა.შ.). თითოეული ოპერაცია ფასდება განსაზღვრული კოეფიციენტით. ამ კოეფიციენტთა ჯამი წარმოადგენს ე.წ. სიმარტივის კოეფიციენტს.

მაგალითად, იმისათვის, რომ **AB**-მონაკვეთის შუა წერტილიდან გავავლოთ **AB-**ს პერპენდუკულარული წრფე, საჭიროა ფარგლის წვერი მოვათავსოთ **A-**წერტილში და შემოვხაზოთ რკალი **R**-რადიუსით, რომლის სიდიდე **AB**-მონაკვეთის სიგრძის ნახევარზე მეტია; ამავე რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი მონაკვეთის **B-**ბოლოდან. რკალების გადაკვეთით მიღებულ ორ წერტილზე სახაზავის დახმარებით გავავლოთ წრფე.

თუ შევაფასებთ ფარგლის წვერის მოცემულ წერტილში დასმას $C_1=1$ კოეფიციენტით, $C_2=1$-ით რკალის შემოხაზვას, სახაზავის მიტანას ორ წერტილთან $C_3=2$, სახაზავით წრფის გავლებას $C_4=1$, მაშინ სიმარტივის კოეფიციენტი ასეთი აგებისათვის იქნება 7. ორი აგებიდან უფრო მარტივად ითვლება ის, რომლის სიმარტივის კოეფიციენტი ნაკლებია.

საერთოდ, საუკეთესოდ უნდა ჩაითვალოს არა მხოლოდ ეკონომიური, არამედ უფრო ზუსტი ამონახსენი. ამ თვალსაზრისით, გეომეტროგრაფიული მეთოდი არ იძლევა ამ თუ იმ ამოხსნის შეფასების საშუალებას. მართლაც, მოყვანილ მაგალითში, რკალების რადიუსები ერთ შემთხვევაში შეიძლება ავიღოთ ბევრად მეტი მონაკვეთის სიგრძის ნახევარზე, ვიდრე მეორეში.

მეორე შემთხვევაში გადაკვეთის წერტილები ერთმანეთთან ახლოს იქნება და მათზე სახაზავით პერპენდიკულარის გავლებისას შეცდომის ალბათობა იზრდება, თუმცა სიმარტივის კოეფიციენტი ორივე შემთხვევაში ერთი და იგივეა.

ამის გარდა, წინადადება "რაც უფრო ნაკლებია დამატებითი აგებათა რაოდენობა, მით უკეთესია ამოხსნა" არ შეიძლება ჩაითვალოს ამომწურავად, რადგან გრაფიკული აგებების შემცირება არ შეიძლება იყოს არა მხოლოდ სიზუსტის, არამედ ამოხსნის სიმარტივის საიმედო კრიტერიუმი.

მართლაც, ნახაზზე გამოსახული აგებები არის ამოცანის ამოხსნისას შესრულებული გონებრივი მუშაობის შედეგი. ეს საერთოდ არაა გათვალისწინებული ზემოთმოყვანილ კრიტერიუმში. ამოცანის ამოხსნის მეთოდის შეფასებისას არსებით როლს ასრულებს ასევე აგებათა თვალსაჩინოება.

ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით, ამოცანის ამოხსნის ამა თუ იმ მეთოდის გამოყენების მიზანშეწონილობის შესაფასებლად,

გრაფიკულ აგებათა რაოდენობის გარდა საჭიროა შეძლებისდაგვარად გათვალისწინებულ იქნას სხვა ფაქტორებიც.

მხაზველობითი გეომეტრიის ამოცანის ამოხსნის უფრო მარტივ და რაციონალურ მეთოდად ითვლება ის, რომლითაც შრომისა და დროის მინიმალური დანახარჯებით მიიღწევა მაქსიმალური სიზუსტე.

1.3.2. ბრუნვისა და გეგმილთა სიბრტყეების ცვლის მეთოდი

ბრუნვის მეთოდი მხაზველობითი გეომეტრიის მეტრიკული და პოზიციური შინაარსის სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნელად გამოიყენება. ამასთანავე, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ გეგმილის სიბრტყის პერპენდიკულარული ღერძების გარშემო ბრუნვა, უმეტეს შემთხვევაში, მოითხოვს რთული აგებების შესრულებას, რაც გამოწვეულია ძველ გეგმილებზე ახალი გეგმილების დაფენით.

გეგმილების დაფენას შეიძლება ავარიდოთ თავი, თუ გამოვიყენებთ პარალელური გადაადგილების მეთოდს. ამოცანის ამ მეთოდით ამოხსნა მნიშვნელოვნად იოლდება კალკის გამოყენებით. ამ შემთხვევაში ორიდან ერთ (ან ოთხიდან ორ) დამატებით გეგმილს კი არ აგებენ, არამედ გადააქვთ კალკაზე, რომელსაც შემდგომ ნახაზის უფრო მოხერხებულ ადგილას აფარებენ. შემდეგ დამატებით გეგმილს აგებენ კალკაზე გამოსახული გეგმილისა და წინა გეგმილის დახმარებით.

ბრუნვის მეთოდის გამოყენება მოხერხებულია სიბრტყითი ამოცანების ამოხსნისას. ამ შემთხვევაში ბრუნვა ხორციელდება მთავარი წრფის გარშემო (კერძო შემთხვევაში სიბრტყის კვალის გარშემო), რაც ამოცანის მარტივად ამოხსნის საშუალებას იძლევა.

ამ მეთოდის გამოყენება რეკომენდირებულია ბრტყელი ფიგურების ნატურალური სიდიდეების განსაზღვრისათვის და სიბრტყეზე სხვადასხვა მეტრიკული ამოცანების ამოსახსნელად.

გეგმილთა სიბრტყეთა ცვლის მეთოდი ისევე, როგორც ბრუნვის მეთოდი, იძლევა სხვადასხვა მეტრიკული და პოზიციური ამოცანების ამოხსნის გამარტივების საშუალებას. გეგმილის ახალი ღერძების მდებარეობის არჩევის თავისუფლება უფრო თვალსაჩინო ეპიურის მიღების საძუალებას იძლევა (იმ ეპიურთან შედარებით, რომელიც მიიღება ბრუნვის მეთოდის გამოყენებით ამოხსნისას).

გეგმილების სიბრტყეთა ცვლის მეთოდის უპირატესობა ვლინდება დამატებითი გეგმილების რაოდენობის შემცირებით. ეს უპირატესობა უფრო თვალსაჩინოა გეგმილთა ორი სიბრტყის ერთდროული შენაცვლებისას (ვ.ა. ტოროხოვის მეთოდი). გეგმილის სიბრტყეების ცვლის მეთოდი იძლევა უფრო რაციონალურ ამონახსნებს იმ შემთხვევაში, თუ მოითხოვება გეომეტრიული ელემენტების ურთიერთმდებარეობის დადგენა ერთ ან რამოდენიმე პარალელურ სიბრტყეში. ეს მოცანები შეიძლება იყოს მეტრიკულიც და პოზიციურიც.

1.3.3. გეგმილთა სიბრტყეების ცვლის და ბრუნვის მეთოდების შეთავსება

გეგმილთა სიბრტყეების ცვლის მეთოდისა და ბრუნვის მეთოდის შეთავსების გამოყენება შესაძლებელია იმ შემთხვევებში, როცა ცალ-ცალკე ამ მეთოდების გამოყენებას მივყავართ რთულ და მოუხერხებელ აგებებამდე.

მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ გრაფიკულ აგებათა შემცირება შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ბრუნვას შევცლით გეგმილთა სიბრტეეების ცვლით და არა პირიქით.

დამხმარე დაგეგმილების მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნას სხვადასხვა მეტრიკული და პოზიციური ამოცანების ამოსახსნელად.

ამასთანავე, რიგ შემთხვევებში ამოხსნა უფრო მარტივდება ვიდრე კლასიკური მეთოდების გამოყენებისას.

ახლა შევჩერდეთ იმ საკითხზე, თუ რომელ მეთოდს მივანიჭოთ უპირატესობა კონკრეტული ამოცანის ამოხსნისას.

ამა თუ იმ მეთოდის არჩევა დამოკიდებულია ამოცანის პირობაზე. ასე რომ, პრიზმისა და ცილინდრის, პრიზმისა და პრიზმის ან ცილინდირისა და ცილინდრის თანაკვეთის შესახებ ამოცანის ამოსახსნელად, უფრო ეფექტურია სპეციალურად შერჩეულ სიბრტყეზე პარალელური (ირიბკუთხა და მართკუთხა) დაგეგმილების გამოყენება (ს. მ. კოლოტოვი).

იმ შემთხვევებში, როცა პრიზმის წიბოების ან ცილინდრების მსახველების გეგმილები ნახაზის ხელსაყრელ ადგილზე იკვეთება (არ ფარავენ მოცემულ პროექციებს), დაგეგმილება მიზანშეწონილია მეორე და მეოთხე ოქტანტების ბისექტორულ სიბრტყეზე. როცა ცილინდრის მსახველი ან პრიზმის წიბო აბსცისთა ღერძთან მცირე კუთხეს ქმნის ან მისი პარალელურია ამ მეთოდის გამოყენება არ არის მიზანშეწონილი, ხოლო ზოგ შემთხვევაში შეუძლებელიცაა, რადგან ამ შემთხვევაში, ეპიურაზე შეუძლებელია მსახველის ან წიბოს ბისექტორიულ სიბრტყესთან შეხვედრის წერტილების მიღება.

ირიბკუთხა დამხმარე დაგეგმილება საშუალებას გვაძლევს მარტივად ამოვხსნათ ამოცანები ცილინდრებისა და პრიზმების სიბრტყით გადაკვეთაზე.

თუ მოითხოვება კონუსისა ან პირამიდის სიბრტყით კვეთის განსაზღვრა, მაშინ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ პარალელური დაგეგმილება საკოორდინატო სიბრტყეზე, მკვეთი ჰორიზონტალური (ან ფრონტალური) სიბრტყის მიმართულებით.

იმ ამოცანებისთვის, სადაც საჭიროა კონუსის ზედაპირისა და წრფის შეხვედრის წერტილების განსაზღვრა, მიზანშეწონილია

ცენტრალური დაგეგმილების გამოყენება. რადგან მისი საშუალებით ყველაზე უკეთაა შესაძლებელი ეკონომიური ამონახსნების მიღება.

ბრუნვის ზედაპირისა და წრფის შეხვედრის წერტილების განსაზღვრისათვის ყველაზე ეკონომიურია წრიული დაგეგმილების გამოყენება.

იმ შემთხვევებში, როცა საჭიროა განვსაზღვროთ მიღებული კვეთის ფორმა და ზომები, მიზანშეწონილია კომბინირებული მეთოდის გამოყენება. გასათვალისწინებელია, რომ მეტრიკული ამოცანების ამოსახსნელად საუკეთესო შედეგები მიიღება კომბინირებული მეთოდის ან ორ არაურთიერთპერპენდიკულარულ სიბრტყეზე მართკუთხა დაგეგმილების გამოყენებით.

სხვადასხვა დამხმარე დაგეგმილება, კლასიკურ მეთოდებთან შედარებით, მნიშვნელოვნად ამარტივებს ამოცანის ამოხსნას იმ შემთხვევაში, როცა მასში არ მონაწილეობს სივრცითი წირები ან მრუდწირული მსახველებით შემოსაზღვრული ზედაპირების მქონე სხეულები.

1.3.4. პერსპექტიულ-აფინური და ჰომოლოგიური გარდაქმნები

პროექციული გარდაქმნების მეთოდი ეფექტურია ისეთი პოზიციური ამოცანების ამოხსნისას, რომელშიც მეორე რიგის არაწრფოვანი ზედაპირები მონაწილეობენ.

პერსპექტიულ-აფინური გარდაქმნა. პერსპექტიულ-აფინური (ნათესაური) გარდაქმნით შესაძლებელია მარტივად ამოვხსნათ პრიზმის, პირამიდის ან ცილინდრის და მეორე რიგის არაწრფოვანი ზედაპირით შემოსაზღვრულ სხეულთა თანაკვეთის წირის პოვნის ამოცანები.

ნათესაური გარდაქმნის მეთოდი არსებითად არ ამარტივებს იმ ამოცანების ამოხსნას, რომელშიც მონაწილეობს მეორე რიგის არაწრფოვანი ზედაპირებით შემოსაზღვრული ორი ფიგურა.

თუმცა, ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ორჯერ შევამციროთ ლეკალური წირების რაოდენობა, რომელთა ამოხაზვა აუცილებელია პასუხის მისაღებად. ეს შემცირება ხდება ერთ-ერთი თანამკვეთი ზედაპირის ბრუნვის ზედაპირად გარდაქმნით.

ორი მეორე რიგის არაწრფოვანი ზედაპირის ბრუნვის ზედაპირად ერთდროული გარდაქმნა შესაძლებელია განხორციელდეს მხოლოდ კერძო შემთხვევებში, როცა: 1) ყოველი ზედაპირის ნორმალური კვეთები მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსებია; 2) ორივე ზედაპირის ღერძები ურთიერთპარალელულია.

ჰომოლოგიური გარდაქმნა. ჰომოლოგია ელიფსოიდის, პარაბოლოიდისა და ბრუნვის ჰიპერბოლოიდის სფეროდ გარდაქმნის საშუალებას იძლევა. ამიტომ, ეს მეთოდი მიზანშეწონილია გამოყენებულ იქნას ისეთ შემთხვევებში, როცა საჭიროა ელიფსური, პარაბოლური ან ბრუნვის ჰიპერბოლოიდური ზედაპირის ნებისმიერად განლაგებული ცილინდრულ ან კონუსურ ზედაპირთან თანაკვეთის წირის პოვნა.

ჰომოთეტიური გარდაქმნა. ჰომოთეტიური გარდაქმნა იძლევა საშუალებას გავამარტივოთ იმ პოზიციური ამოცანების ამოხსნა, რომელშიც მონაწილეობს მეორე რიგის ზედაპირები (ელიფსური, პარაბოლური ან ჰიპერბოლოიდური), რომლებიც შეიძლება გადაიკვეთოს კონუსურ ზედაპირთან ორ ბრტყელ წირზე.

ამ მეთოდის გამოყენება მიზანშეწონილია ასევე კონუსური ზედაპირებისა და გადაჯვარედინებული ღერძების თანაკვეთის წირის საპოვნელად ან მეორე რიგის არაწრფოვანი ზედაპირის და გეგმილის ერთ-ერთი სიბრტყის პარალელური ღერძების თანაკვეთის წირის საპოვნელად.

პროექციული გარდაქმნისა და კლასიკურ მეთოდების შეთავსება. ზემოთ იყო აღნიშნული, რომ პროექციული გარდაქმნის მეთოდების გამოყენება მიზონშეწონილია იმ შემთხვევებში, როცა მეორე რიგის

არაწრფოვანი ზედაპირით შემოსაზღვრული ფიგურის ღერძები პერპენდიკულარულია ან წრფივი ზედაპირის შემთხვევაში პარალელულურია რომელიმე გეგმილის სიბრტყის.

ამიტომ, მკვეთი ზედაპირების ღერძთა ნებისმიერი განლაგებისას საჭიროა კლასიკური მეთოდებით ისე გარდაიქმნას ეპიური, რომ ამ ზედაპირის ღერძებმა დაიკავოს სათანადო მდგომარეობა.

სივრცითი გარდაქმნების მეთოდის მნიშვნელოვანი უპირატესობა ისაა, რომ შესაძლებელია აგებები განვახორციელოთ ძირითადი ნახაზის ფარგლებს გარეთ.

ამის გარდა, სივრცითი გარდაქმნის მეთოდი არაა დაკავშირებული საკოორდინატო ღერძებთან, ამიტომ მისი გამოყენება შესაძლებელია უღერძო სისტემაშიც.

1.3.5. ტოპოლოგიური და კვადრატული გარდაქმნების შესახებ

ტოპოლოგია გამოიყენება ეპიურის გარდაქმნებისათვის, ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის გამარტივების მიზნით. ჩვენთვის საინტერესოა მხოლოდ ისეთი ტოპოლოგიური გარდაქმნები, რომლებიც გრაფიკულად ადვილი განსახორციელებელია. ამისათვის გეომეტრიული ფიგურა განიხილება იმ სამგანზომილებიანი სივრცის განუყოფელ ნაწილად, რომელშიც ის იმყოფება. მოცემული ფიგურის ასახვით ისეთ მის ჰომეომორფულ ფიგურაზე, რომელიც ფორმით და თვისებებით უფრო მოხერხებულია კონკრეტული ამოცანის ამოსახსნელად, ხდება მთელი სივრცის ტოპოლოგიური დეფორმაცია.

ამოცანის ამოხსნა ხორციელდება გარდაქმნილ (დეფორმირებულ) სივრცეში დეფორმირებული ფიგურების მონაწილეობით, მიღებული შედეგის საწყის ეპიურზე დაბრუნებით.

ტოპოლოგიური გარდაქმნების მეთოდი.

ტოპოლოგიური გარდაქმნების მეთოდი იძლევა საშუალებას ამოიხსნას მხაზველობითი გეომეტრიის ისეთი რთული პოზიციური

ამოცანები, რომელშიც მონაწილეობს გეომეტრიული ფიგურები მსგავსი და მსგავსად განლაგებული კვეთებით.

ამ მეთოდის გამოყენება მიზანშეწონილია მაშინ, როცა სხვა მეთოდის გამოყენებით ვაწყდებით სირთულეებს ან ვერ მიიღება ზუსტი შედეგები.

ტოპოლოგიური გარდაქმნებით ამოცანების ამოხსნა გამოირჩევა თვალსაჩინოებით და გამორიცხავს უხეში შეცდომების დაშვების შესაძლებლობას.

კვადრატური გარდაქმნის მეთოდი.

კვადრატული გარდაქმნების მეთოდის გამოყენება იმიტომაა მიზანშეწონილი, რომ მისი გამოყენებისას შესაძლებელია თავი ავარიდოთ ზედაპირისა და სიბრტყის თანაკვეთით მიღებული ლეკალური წირების აგებას და ისინი შევცვალოთ შესაბამისი წრფეებით. ეს მნიშვნელოვნად ამარტივებს აგებებს და ზრდის ამონახსნის სიზუსტეს.

კვადრატული გარდაქმნების მეთოდის გამოყენების არე შეზღუდულია. ის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მხოლოდ ზოგიერთი ზედაპირების თანაკვეთის წირების ასაგებად, და ისიც იმ შემთხვევაში, როცა ეს ზედაპირები ისეა განლაგებული, რომ დამხმარე სიბრტყეებთან გადაკვეთით მიღებულ კვეთებს ექნებათ საერთო ღერძი და ფოკუსი. ასეთია, მაგალითად, ბრუნვის პარაბოლოიდისა და ზოგადი სახის კონუსის, ცილინდრისა და ზოგადი სახის კონუსის, ჰიპერბოლური პარაბოლოიდისა და ბრუნვის ელიფსოიდის თანაკვეთის წირის აგების ამოცანები.

ქვემოთ მოყვანილია ტოპოლოგიური და კვადრატული გარდაქმნების მეთოდების გამოყენების მაგალითები ზოგიერთი პოზიციური ამოცანების ამოსახსნელად.

1.4. მხაზველობითი გეომეტრიის პოზიციური ამოცანების შესახებ

მათემატიკური თვალსაზრისით, მხაზველობითი გეომეტრია შეისწავლის სხვადასხვა სივრცეების (ნებისმიერი განზომილებისა და მეტრიკის) ასახვის საშუალებებს მის ქვესივრცეებზე, კერძოდ, სიბრტყეზე. სხვა სიტყვებით, ეს არის მეცნიერება სივრცეთა მოდელების აგების შესახებ, სადაც სივრცის ელემენტების ასახვა ხდება გრაფიკულად.

1.4.1. მოდელი როგორც გამოსახვის ფორმა და საშუალება

აღსანიშნავია, რომ ასასახი ობიექტების (“ორიგინალების”) და შექცევადი ანასახების (“მოდელების”) სივრცეები არ არის ერთნაირი განზომილებების: მოდელების სივრცეების განომილება ერთი ერთეულით მაინც ნაკლებია, ვიდრე ორიგინალების სივრცის განზომილება. ეს ვითარება სპეციფიკურ ურთიერთკავშირს ქმნის მოდელსა და ორიგინალს შორის. კერძოდ, ორიგინალის წერტილი, დამატებითი პირობების გარეშე, შეუძლებელია მოდელირებული იქნას ისევ წერტილად, რადგან ორიგინალებისა და მოდელების წერტილთა სიმრავლეების განზომილებები განსხვავებულია. ეს მოდელში იწვევს წერტილთა წყვილების (ბინარული მოდელები), სამმაგი წერტილების (ტერნარული მოდელები) და საერთოდ, წერტილთა, წრფეთა და სხვა ელემენტთა ჯგუფების წარმოქმნას.

ბოლო წლეებში, ლიტერატურაში მხაზველობითი გეომეტრიის შესახებ დამკვიდრდა ტერმინი “გეომეტრიული მოდელირება”, რომელიც სივრცეთა მოდელების აგების საკითხებთან დაკავშირებულ გამოკვლევათა მიმართულებებს ახასიათებს. აღსანიშნავია, რომ მხაზველობით გეომეტრიაში მოდელირების პრინციპი არის ერთ-ერთი ძირითადი, რადგან ის შეისწავლის სივრცეების უფრო ნაკლები განზომილების ქვესივრცეებზე ასახვის საშუალებებს. ამიტომ,

გეომეტრიული მოდელირების თეორია უმთავრესი მიმართულებაა მხაზველობითი გეომეტრიის მომავალი განვითარებისათვის.

თანამედროვე გამოყენებით გეომეტრიაში სიბრტყეზე სივრცის ასახვის უამრავი საშუალებაა ცნობილი. განსაზღვრული მეცნიერული და ტექნიკური ფორმების გამოკვლევისას მიღებულ ყოველ მოდელს გამოყენებისას სხვებთან შედარებით თავისი უპირატესობა გააჩნია. ეს ცხადი გახდა ჯერ კიდევ მხაზველობითი გეომეტრიის წარმოშობის დასაწყისში, რასაც შედეგად მოჰყვა ასახვის რამოდენიმე კლასიკური საშუალების (მეთოდის) შექმნა: მონჟის მეთოდი, პერსპექტივა, აქსონომეტრია და გეგმილები რიცხვითი ნიშნებით. მეცნიერების თანამედროვე ეტაპზე კი, როდესაც მის წინაშე დგას პრობლემათა უფრო ფართო წრე, წარმოიშობა სივრცეების ასახვის ახალ მეთოდთა შექმნის ანუ ახალი მოდელების დამუშავების საჭიროება.

მოდელი, როგორც სინამდვილის ასახვის საშუალება და ფორმა, მეცნიერებისა და ტექნიკის ყველა დარგის სპეციალისტების ყურადღებას იპყრობს. მოდელის როლი შეცნობისას, ფილოსოფიურ ასპექტში, მოდელების შესაბამისი კლასიფიკაცია და სხვა საიკითხების მთელი რიგი, რომლებიც უკავშირდება მოდელების გამოყენებას მეცნიერებაში, ჩამოყალიბებულია ვ.ა. შტოფის წიგნში[54]. სივცეების გეომეტრიული მოდელები ლოგიკურ-მათემატიკური მოდელების კლასს მიეკუთვნება და გამოირჩევიან კონკრეტულობით, ანუ ზუსტად ასახავენ შესასწავლი სივრცის თვისებებს. ეს შესაძლებელია, რადგანაც გეომეტრია შეისწავლის სივრცითი ელემენტების დამოკიდებულებებისა და კავშირების სტრუქტურას (რომლებიც ექვემდებარება ზუსტ მოდელირებას) და არ შეეხება ობიექტების ფიზიკურ, ქიმიურ და სხვა თვისებებს. თუ ბუნებისმეტყველებაში მოდელების აგება გამოკვლევათა ჯაჭვის შუალედური რგოლია და თეორიის განვითარების ახალი გზების აღმოჩენის საშუალებას იძლევა, მაშინ მხაზველობით გეომეტრიაში მოდელის აგება საბოლოო მიზანს წარმოადგენს და შემდეგ, ძირითადი

ყურადღება უნდა მიექცეს მოდელის ლოკალური თვისებების შესწავლას, სამომავლოდ, მეცნიერებისა და ტექნიკის ამა თუ იმ დარგში გამოყენებისათვის.

გამოსაკვლევ ობიექტსა და მის მოდელს შორის იზომორფული კავშირის არსებობის წინასწარ დამტკიცების შემდეგ, გეომეტრიული მოდელზე ოპერირებით, ჩვენ დარწმუნებული ვიქნებით სამოდელო სივრცეში შესაბამის ოპერაციათა ჭეშმარიტებაში.

ხაზი უნდა გაესვას განსხვავებას მათემატიკურ ლიტერატურაში მოხსენიებულ მოდელებს (ინტერპრეტაციებს) და მხაზველობითი გეომეტრიის მოდელებს შორის. მათემატიკოსები ინტერპრეტაციებს ახორციელებენ ერთ განზომილებაში, ე.ი. პლანიმეტრიაში ინტერპრეტაციები ხორციელდება სიბრტყეზე, ან სხვა ორგანზომილებიან ობიექტზე, ხოლო სტერეომეტრიაში – სამგანზომილებად ობიექტებზე. მაგალითად: 1) ევკლიდის პლანიმეტრიის პუანკარის ინტერპრეტაცია წრეწირების ბმულობის საშუალებით; 2) ლობაჩევსკის სივრცის ბელტრამ-კლეინის ინტერპრეტაცია ევკლიდის სივრცის სფეროს შიდა არის მეშვეობით; 3) ლობაჩევსკის სივრცის პუანკარის ინტერპრეტაცია წრეწირის შიდა არის მეშვეობით და ა. შ.

ყველა ამ ინტერპრეტაციას აქვს მეტად მნიშვნელოვანი მიზანი – ამა თუ იმ სისტემის არაწინააღმდეგობრიობის ჩვენება, იზომორფულობის დამტკიცების გზით. ამავე მიზანს ემსახურება ყველა შესაძლო ‘‘გადაადგილებები’’, რომლებშიც ასევე ერთნაირი განზომილებები ფიგურირებს.

1.4.2. სიბრტყითი და სივრცითი გარდაქმნების შესახებ

გამოყენებით გეომეტრიაში სივრცის გეომეტრიული მოდელირება ორნაირად ხორციელდება: ან სივრიცის სიბრტყეზე დაგეგმილების აპარატის შემუშავებით, ან ანასახის უშუალო აგებით (პროექციული

კავშირის გარეშე) მისი არაწინააღმდეგობრიობის აქსიომატური შემოწმების ბაზაზე. მიღებულ მოდელებს შესაბამისად ვუწოდებთ კონსტრუქციულს და დამოუკიდებელს (ი.ს. ჯაფარიძის რეკომენდაციით) ან პროექციულსა და აქსიომატიკურს (ნ.ფ. ჩეტვერუხინის რეკომენდაციით).

მოდელების თვისებების კვლევისას განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენენ სხვადასხვა სიბრტყითი და სივრცითი გარდაქმნები. ორგანულია მათი კავშირი ასასახი ობიექტების თვისებებთან და ამ ობიექტების გამოსახულებათა გლობალური თვისებები ნათლად ვლინდება მოდელის სიბრტყეში (ან სივრცეში) შექმნილი გარდაქმნებით. მართლაც, მაგალითად, სივრცის წერტილის მოდელირება მოდელის სიბრტყეზე თუ ხდება წყვილი წერტილებით, მაშინ რომელიმე სიბრტყის წერტილების მოდელირება უნდა მოხდეს წერტილთა ველის ორმაგი სიმრავლით, მაშასადამე მყარდება წერტილთა ველების რაღაც შესაბამისაობა (გარდაქმნა). იგივე სამართლიანია ნებისმიერი ზედაპერებისა და სხვა გეომეტრიული სიმრავლეების მოდელირებისას. ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში მყარდება განსაზღვრული შესაბამისობა (გარდაქმნა), თუ ჩვენთვის ცნობილია ამ გარდაქმნების თვისებები, მაშინ ასახული ობიექტების თვისებები ნახაზიდან - მოდელის სიბრტყიდან ადვილად “იკითხება”. ე. ი. მოდელის სიბრტყეში ზედაპირების მოდელირებით წერტილთა ველებს შორის მყარდება მრავალი სახის არაწრფივი შესაბამისობები. კერძოდ, მოდელის სიბრტყეში კვადრიკების მოდელირებით წარმოიქმნება სხვადასხვა მნიშვნელობის კვადრატული გარდაქმნები, რომელთა შესწავლა იძლევა ამ გარდაქმნების, მათი თვისებებისა და შესაბამისობების გამოყენების საშუალებას შემდგომში ასეთი გარდაქმნების საჭიროებისას. ხოლო, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ სივრცის მეტრიკული მოდელები, ტექნიკაში გავრცელებული, სივრცეთა ასახვის უამრავ საშუალებათა ანალოგია, მათ შორის მონჟის

მეთოდისაც, მაშინ ცხადი ხდება მოდელის სიბრტყეში კვადრიკებით დადგენილი შესაბამისობების გამოყენების შესაძლებლობა გამოყენებითი გეომეტრიის ამოცანების ამოსახსნელად.

1.4.3. ფაქტობრივი მასალის მოკლე მიმოხილვა

მოვიყვანოთ გეომეტრიული მოდელირების სფეროში მნიშვნლოვან ნაშრომთა მოკლე მიმოხილვა. ავღნიშნოთ, რომ ქვემოთხსენებულ ზოგიერთ ავტორთა ნაშრომში ტერმინი ‘‘მოდელირება’’ არ ფიგურირებს, მაგრამ შინარსით, სწორედ სივრცის მთლიანად ან ელემენტთა ჯგუფის მოდელირების საკითხების კვლევა ხდება.

უპირველეს ყოვლისა, აღსანიშნავია ნ. ფ. ჩეტვერუხინის ნაშრომები სრული და არასრული გამოსახულებათა თეორიის [49] და გამოსახულების აგების პარამეტრული მეთოდის შესახებ [50]. ამ შრომებმა, ისევე როგორც ნ.ფ. ჩეტვერუხინის მთელმა შემოქმედებამ, მნიშვნელოვანი გავლენა მოახდინა გამოყენებითი გეომეტრიის შექმნასა და განვითარებაზე.

ი. ი. კოტოვმა [40] ყურადღება გაამახვილა იმაზე, რომ მხაზველობითი გეომეტრია არის მეცნიერება სივრცის მოდელების აგების შესახებ და წარმოადგინა მოდელის აგების ახალი ხერხი - სივრცის ელემენტების ცენტრალური დაგეგმილებით (ერთ სიბრტყეზე), შევსებული მათი შესაბამისი ანასახებით და ინვოლუციური კოლინეაციით.

ე. ქ. მჭედლიშვილმა [43] სრულად ააგო სივრცის ერთ-ერთი ბინარული მოდელი სივრცის გამოსახულებასთან კონსტრუქციული ბმების დამოუკიდებლად, სადაც სივრცის ყოველი წერტილი ინტერპრეტირებული იყო, ცენტრით ერთ-ერთი ∞^3 ჰომოლოგიიდან (სიბრტყეზე) და მუდმივი ღერძით.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ი. ს. ჯაფარიძის შრომები გეომეტრიული მოდელირების თეორიის განვითარების საქმეში. მის სადოქტორო დისერტაციაში [36] ჩამოყალიბებული იყო წინადადებები მის მიერვე შექმნილი ცხრილის საფუძველზე მიღებული მოდელების (წრფივი და არაწრფივი) შესახებ. ამან შესაძლებელი გახადა ბინარული მოდელების, რომლებსაც კავშირი აქვს გამოსახვის მნიშვნელოვან ტექნიკური მეთოდებთან, სისტემატიზირებული ცხრილის შედგენა. გამოვლენილია კავშირი მოდელების ძირითადი ცხრილის სქემასა და კონსტრუქციებს შორის, რომლებიც მიიღება შექცევადი ნახაზების აგების სხვადასხვა ტექნიკური მეთოდებით. აგრეთვე, აღმოჩენილია ბევრი ახალი, საინტერესო სქემა, რომელთა პრაქტიკული რეალიზაცია ჯერ არ მომხდარა. ი.ი. კოტოვის განზოგადოებული პრინციპის საფუძველზე მიღებულია სხვადასხვა სივრცეების ასახვის მეთოდების კლასიფიკაცია, ყველა სივრცითი კოლინეაციისა და კორელაციის შემთხვევებისთვის.

კ. ი. ვალკოვის [35] სადოქტორო დისერტაციაში შეჯამებული იყო კვლევები გეომეტრიული მოდელირების შესახებ, ინფორმაციის თეორიის საკითხებთან ორგანიულ კავშირში. საფუძვლად აღებული იყო წრფივი პროექციული მოდელირება და განიხილებოდა ასახვები, სადაც წერტილები მოდელირდება წერტილთა ჯგუფებით. ასეთ შეზღუდვამ შესაძლებელი გახადა მაქსიმალურად ჩაღრმავება და ნებისმიერი განზომილების სივრცის განხილვა. კ.ი. ვალკოვმა შემდომ შრომებში მოდელირების შესახებ თავისი იდეების პოპულარიზაციის გარდა, დასვა საინტერესო საკითხი გეომეტრიული მოდელირების ზოგადმათემატიკური მნიშვნელობის შესახებ და მასთან დაკავშირებით წარმოქმნილ “ინვარიანტული განუსაზღვრელობაზე”.

არანაკლებ საინტერესოა კ.ი. ვალკოვის ნაშრომში დასახული გეომეტრიული მოდელირების თეორიის კვლევის ახალი არეალი, სადაც ორიგინალსა და მის მოდელს შორის არ არის იზომორფული კავშირი,

ანუ ორიგინალის სტრუქტურა მოდელში შენარჩუნებულია მხოლოდ ნაწილობრივ (**Сб. Вопросы геометрического моделирования. Период. изд. 1978. Л.)**. ალბათ, გამართლდება ავტორის ვარაუდი "მხაზველობითი გეომეტრიის ამ ახალი განშტოების სიღრმის, სიმდიდრის, აუთვისებლობისა და მომავალი მოულოდნელი შემობრუნებების შესახებ". მაგალითად, "**Ф**" - მოდელის რაღაც ფაქტორია, რომელიც აკლია მოდელს სრულ იზომორფულობამდე. თუ "**Ф**"-ს ჩავთვლით ცვლადად, მაშინ შესაძლებელია "გავამრავლოთ" ჩვენთვის საინტერესო ორიგინალის სახე. ეს, რა თქმა უნდა, ტრადიციული ხასიათის მოკრძალებული მაგალითია, ავტორს კი მხედველობაში აქვს სხვა, ჯერ კიდევ აუთვისებელი იდეები.

გამოყენებითი გეომეტრიის განვითარების საქმეში დიდი როლი შეასრულა მოსკოვის სემინარების შრომათა კრებულებმა.

გეომეტრიული მოდელირების საკითხების თემატიკასთან სიახლოვით აღსანიშნავია ა. ლ. პოდგორნის [46], ა. ი. ტევლინის [48], გ. ს. ივნოვის [39] შრომები.

1.4.4. სამგანზომილებიანი სივრცის დამოუკიდებელი (აქსიომატური) სიბრტყითი მოდელები

მხაზველობითი გეომეტრიის ერთ-ერთი უმთავრესი ამოცანაა ამა თუ იმ განზომილების და მეტრიკის მქონე სივრცესა და გამოსახულებათა სიბრტყეს შორის ურთიერთკავშირის მათემატიკური აპარატის შემუშავება.

ავღნიშნოთ, რომ $\mathbf{R}_3$-სივრცის განხილვისას, გამოსახულებათა სიბრტყედ იგულისხმება ჩვეულებრივი ორგანზომილებიანი სიბრტყე (2-სიბრტყე), მაგრამ **n**-განზომილებიანი სივრცის მხაზველობითი გეომეტრიისათვის ყველა შემდგომი მსჯელობები სამართლიანია 3-სიბრტყეზე (სამგნზომილებიანი სიბრტყე, ჰიპერსივრცე) ასახვისას და საერთოდ **k**-სიბრტყეზე, სადაც **k**<**n**.

კავშირი სივრცესა და სიბრტყეს შორის კონსტრუქტიულად შეიძლება განხორციელდეს, ანუ დაგეგმილების და კვეთის საშუალებით. თუმცა, გამოსახულება შესაძლებელია იყოს სრულად დამოუკიდებული რაიმე კონსტრუქტიული კავშირებისაგან სივრცესთან. ორივე შემთხვევაში გამოსახულებათა სიბრტყე იძენს სპეციფიკურ თვისებებს: ის ხდება წერტილთა ველების, წრფეთა, კონიკთა ველების და ა. შ. სიმრავლეების მატარებელი. ყველა ამ თვისების გამო ის ხდება საწყისი სიბრტყის თავისებური მოდელი, სადაც სივრცის ძირითადი ელემენტების (წერტილთა, წრფეთა და სიბრტყეთა) როლს ასრულებენ:

ა) გამოსახულებათა სიბრტყის განსაზღვრული გეომეტრიული ელემენტები ან ელემენტთა ჯგუფი (გრაფიკული მოდელი);

ბ) გეომეტრიულ ელემენტთა და რიცხვთა ჯგუფი (გრაფო-ანალიტიკური მოდელი).

ანალიტიკურ მოდელს არ მოვიხსენიებთ, რადგან ის არ არის მხაზველობითი გეომეტრიის შესწავლის ობიექტი. თუმცა, უნდა გვახსოვდეს, რომ გეომეტრიული მოდელირების პრაქტიკული გამოყენება ხშირად მოითხოვს ანალიზურ მოდელზე გადასვლის ალგორითმის შემუშავებას.

კონსტრუქციულ და დამოუკიდებელ მოდელებს შორის განსხვავება მდგომარეობს შემდეგში: პირველი ასასახ სივრცესთან საკმაოდ მყარადაა დაკავშირებული. ყოველი „წერტილი“ (მაგალითად, მონჟის მეთოდის წერტილთა წყვილი) ურთიერთ-ცალსახადაა დაკავშირებული სივრცის კონკრეტულ წერტილთან. მეორე კი, საწყისი მონაცემების განსაზღვრის შემდეგ, (ე. ი. დგინდება რა არის წერტილი, წრფე და სიბრტყე), თვითონ ღებულობს სივრცის ყველა თვისებას, რომელიც შესაძლებელია დაკავშირებული იყოს ანალოგიურ გადაუგვარებელ სივრცესთან სხვადასხვა საშუალებებით. მაგალითად, შესაძლებელია მათ შორის დამყარდეს პროექციული შესაბამისობა, სივრცეში 5 ნებისმიერი წერტილის მოცემით და მათთვის მოდელის 5

„წერტილის“ შესაბამებით; მაშინ შესაძლებელია შესაბამის ელემენტთა ნებისმიერი წყვილების განსაზღვრა. დამოუკიდებელი მოდელი შესაძლებელია არც დავაკავშიროთ განსაზღვრულ სივრცესთან, არამედ შევისწავლოთ დამოუკიდებლად. შესაბამისი მეტრიკის (ევკლიდეს, არაევკლიდეს, ფსევდოევკლიდეს და ა.შ.). შემოღებით შესაძლებელია ის გავხადოთ მეტრიკულად განსაზღვრული.

სამ, ოთხ და **n**-განზომილებიან სივრცეებს ავღნიშნავთ $\mathbf{R_3, R_4, \ldots, R_n}$ სიმბოლოებით. ამ სივრცეების სიბრტყით მოდელებს ავღნიშნავთ $\mathbf{R_{2+1}, R_{2+2}, \ldots, R_{2+(n-2)}}$, ე.ი. პირველი ინდექსი გვიჩვენებს, რომ მოდელი ხორციელდება $\mathbf{R_2}$-სიბრტყეზე, ხოლო ინდექსთა ჯამი გვიჩვენებს სივრცის განზომილებას. მეორე ინდექსის მნიშვნელობაზე შემდგომ ვისაუბრებთ.

მოდელის აგება დავიწყოთ წერტილის ასახვით. მისი ინტერპრეტაცია შესაძლებელია ან რომელიმე ერთი გეომეტრიული ელემენტით (მაგალითად, ციკლოგრაფიაში „წერტილი“ მოდელირდება წრეწირით), ან ორი (მაგალითად, მონჟის მეთოდში „წერტილი“ - წერტილთა წყვილი), ან სამი და ა.შ. გეომეტრიული ელემენტით.

1.4.5. ბინარული და ტერნარული მოდელების შესახებ

განვიხლოთ შემთხვევა, სადაც „წერტილს“ წარმოადგენს წერტილთა წყვილი $\mathbf{R_{2+1}}$-ში; მაშინ, ცხადია, წრფის როლს შეასრულებს წერტილთა ერთპარამეტრიანი წყვილების სიმრავლე; ხოლო სიბრტყის როლს – წერტილთა ორპარამეტრიანი წყვილების სიმრავლე. მოდელებს, სადაც წერტილების ინტერპრეტაცია ხდება ერთი ელემენტით, ვუწოდოთ მონომოდელები, ორი ელემენტით - ბინარული მოდელები, სამით - ტერნარული, ხოლო ოთხით - კვატერნარული.

მეორეს მხრივ, ასასახი სივრცის განზომილების მიხედვით მოდელები დაყოფილია ჯგუფებად. შეიძლება გვქონდეს, მაგალითად,

$\mathbf{R}_{2+2}$ მონომოდელი, $\mathbf{R}_{2+1}$ ბინრული მოდელა და ა.შ. აღსანიშნავია, რომ მოდელების შესწავლისას, მათემტიკოსები (მაგალითად, [1]) ძირითადად დაინტერესებულნი იყვნენ მონომოდელებით, როგორც ყველაზე ბუნებრივით. სივრცის ყოველი წერტილი უკავშირდება სიბრტყის ერთ ელემენტს, ანუ ადგილი აქვს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას. აღმოჩნდა, რომ საინჟინრო საქმეში უფრო ნაყოფიერია ბინარული მოდელი.

თეორიულად მრავალი სხვადასხვა ბინარული მოდელის აგებაა შესაძლებელი, სადაც „წერტილთა“ როლს ასრულებს სიბრტყის ელემენტთა წყვილები (ცხადია, პარამეტრების გადათვლიდან გამომდინარე გარკვეული შეზღუდვებით). სასურველია, შესასწავლი მოდელების სიმრავლიდან გამოვყოთ ის ჯგუფი, რომელსაც აქვს მარტივი და თვალსაჩინო კონსტრუქცია. ეს ისეთი მოდელებია, სადაც $\mathbf{R}_3$-ის წერტილები მოდელირდება წერტილთა ჯგუფებით (ბინარულ მოდელში - წერტილთა წყვილით, ტერნარულში - წერტილთა სამეულით და ა. შ.), წრფეები - წრფეთა ჯგუფებით, ამასთან, წერტილთა მწკრივი წრფეზე მოდელირდება ასახული წრფეების პროექციულ წერტილთა მწკრივებზე. ყველა მოდელი, რომლებსაც გააჩნიათ ეს თვისებები, ვუწოდებთ ძირითად წრფივ მოდელებს.

თავი 2

პოზიციური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები ტოპოლოგიური და კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით

2.1 პოზიციური ამოცანების ამოხსნა ტოპოლოგიური გარდაქმნების გამოყენებით

ისეთი პოზიციური ამოცანების ამოსახსნელად, სადაც მეორე რიგის ზედაპირები მონაწილეობს, შეიძლება გამოვიყენოთ ტოპოლოგია, როგორც სივრცის ძლიერი გარდაქმნა. ტოპოლოგია ახდენს სივრცის გარდაქმნას, ფიგურის ფორმის ნებისმიერი ცვლილებით. კერძოდ, მრუდი წირი შეიძლება აისახოს წრფეზე, ხოლო მრუდწირული ზედაპირი - წრფოვანზე. აქედან გამომდინარე ტოპოლოგიურ გარდაქმნას გააჩნია სივრცის დეფორმაციის მაღალი ხარისხი, რომელიც უზრუნველყოფს ამ გარდაქმნების ეფექტურ გამოყენებას ამოცანების ამოხსნების გასამარტივებლად.

2.1.1.ტოპოლოგიური გარდაქმნები; ჰომეომორფული ფიგურები

პროექციული გეომეტრიის წარმოქმნასთან ერთად ცხადი გახდა, რომ სივრცის მეტრიკული თვისებები არ არის მისი ძირითადი და უმნიშვნელოვანესი მახასიათებლები. აღმოჩნდა სივრცის საინტერესო და უეჭველად ძირითადი თვისებების ფართო კლასი, რომელიც არ არის დამოკიდებული სიგრძის და მისი ტიპის მეტრიკული ელემენტების ცნებაზე. ეს არის პროექციული თვისებების კლასი, ანუ გეომეტრიული ფიგურების ისეთი თვისებები, რომელიც რომლებიც შენარჩუნებულია ნებისმიერი პროექციული (კოლინეარული) გარდაქმნებისას. ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი პროექციული გარდაქმნა შეიძლება განხორციელდეს ცენტრალური დაგეგმილების საშუალებით. ფიგურისა და საპროექციო

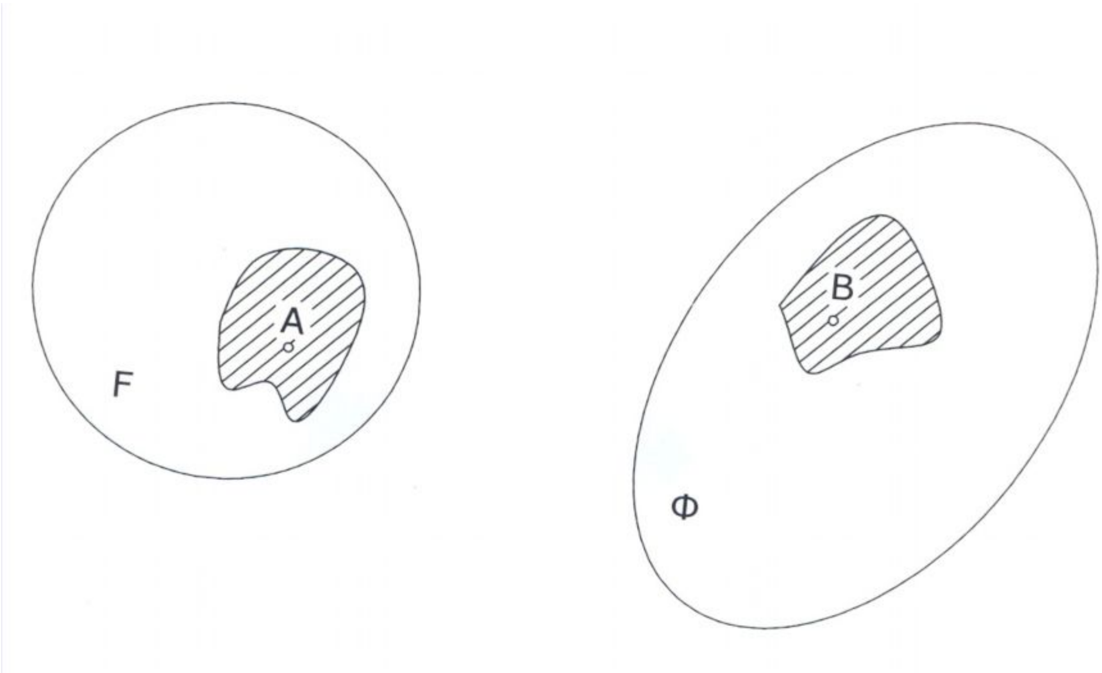
სიბრტყის კონკრეტული ურთიერთგანლაგებისას, ფიგურის ცალკეული ნაწილების კუთხეები და ფარდობითი ზომები (პროპორციები) რჩება უცვლელი (მსგავსების გარდაქმნა). მაგრამ, საერთო პროექციული გარდაქმნისას ისინი იცვლებიან, ვერ არიან საკმარისად მდგრადი, რომ გაუძლონ საერთო პროექციულ გარდაქმნებს. კიდევ უფრო ნაკლებად მგრადია ფიგურის აბსოლიტური განზომილებები: სიგრძე, ფართობი, მოცულობა და ა.შ. ისინი უცვლელია მხოლოდ პარალელური გადატანის სახის გარდქმნისას. მოცემული გეომეტრიული თვისება ითვლება მით უფრო ღრმად და მნიშვნელოვნად რაც უფრო მდგრადია სხვადასხვა სახის გარდაქმნების მიმართ. ამ თვალსაზრისით პროექციული თვისებები უფრო ღრმაა და მნიშვნელოვანი ვიდრე მეტრიკული.

გეომეტრიული თვისებებიდან ტოპოლოლოგიური თვისებები არის ყველაზე მნიშვნელოვანი და მდგრადი ნებისმიერი სახის გარდაქმნების მიმართ. ეს თვისებები უცვლელია ფიგურების ურთიერთ ცალსახა და ურთიერთ უწყვეტი გარდაქმნების მიმართ. ასეთია გარდაქმნა, რომლსაც მოცემული F ფიგურის წერტილები გადაყავს სხვა Ф ფიგურის წერტილებში, ამასთან სრულდება შემდეგი პირობები:

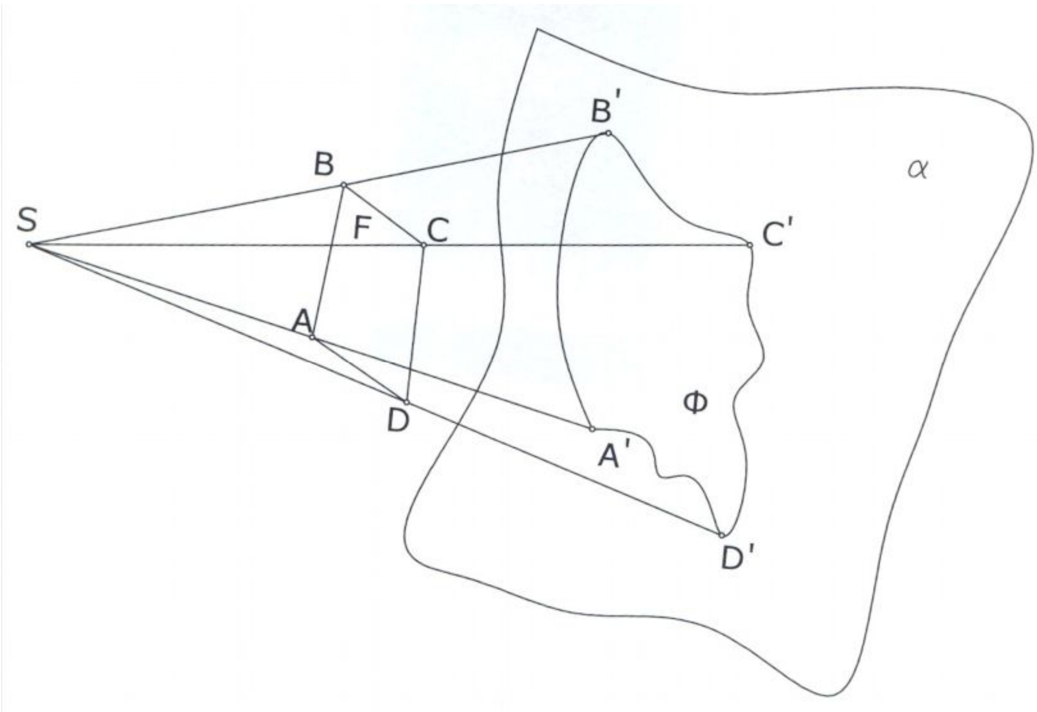
1) F ფიგურის ყოველ წერტილს შეესაბამება Ф ფიგურის მხოლოდ ერთი წერტილი (ურთიერთ ცალსახობა);

2) F ფიგურის უსასრულოდ ახლო წერტილებს შეესაბამება Ф ფიგურის უსასრულოდ ახლო წერტილები (ურთიერთ უწყვეტობა).

მეორე პირობის არსი დგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ A არის F ფიგურის ნებისმიერი წერტილი, B კი მისი შესაბამისი წერტილი Ф ფიგურიდან, მაშინ ამ წერტილებიდან ერთ-ერთის ყოველი მიდამოსათვის (რაგინდ მცირე არ უნდა იყოს ის) მოიძებნება მეორე წერტილის ისეთი (საკმარისად მცირე) მიდამო, რომ ყველა მისი წერტილი გარდაქმნის საშუალებით შეესაბამება პირველი მიდამოს წერტილებს (ნახ 4.). აქ ”მოცემული წერტილის მიდამოს” ცნების ქვეშ შეიძლება ვიგულისხმოთ, მაგალითად, ფიგურის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა



ნახ.4. ფიგურების ტოპოლოგიური გარდაქმნა.



ნახ.5. ცენტრალური დაგეგმილებით წარმოდგენილი ტოპოლოგიურად შესაბამისი ფიგურები.

დაშორებები ამ წერტილიდან ნაკლებია განსაზღვრულ ε რიცხვზე (მიდამოს რადიუსზე). ადვილი შესამჩნევია, რომ უწყვეტობის ეს განმარტება მათემატიკური განმარტების იდენტურია.

ურთიერთცალსახა და ურთიერთუწყვეტ გარდაქმნებს *ტოპოლოგიური გარდაქმნები* ეწოდება. ისინი ვერ ინარჩუნებენ ვერც სიგრძეებს, ვერც კუთხეებს, ვერც სწორხაზოვნებას, ინარჩუნებენ მხოლოდ მეზობლობის დამოკიდებულებას, წერტილების უსასრულო სიახლოვეს. მაგალითად, ფიგურის ნებისმიერად დეფორმაციით ჩვენ მივიღებთ ამ ფიგურის ტოპოლოგიურ გარდაქმნას, ოღონდ არ უნდა მოხდეს წყვეტა და "შეწებვა". ამგვარად, დეფორმაციით წრეწირი შეიძლება გახდეს ელიფსი, არასწორი ფორმის ოვალი ან მრავალკუთხედიც კი, სხვა სიტყვებით, ნებისმიერი მარტივი ჩაკეტილი წირი (ორმაგი წერტილების გარეშე). მაგრამ ასეთი დეფორმაციით ის არ შეიძლება გახდეს შეუკრავი წირი, რადგანაც საჭირო იქნებოდა მისი გაწყვეტა და არც ლემნისკატა, რადგანაც საჭირო იქნებოდა მისი ორი წერტილის შეერთება ანუ "შეწებვა". ზუსტად ასევე, ტოპოლოგიური გარდაქმნით სფერო შეიძლება გარდაიქმნას ელიფსოიდად, კუბად, ცილინდრად და ა.შ. მაგრამ არ შეიძლება მისი გარდაქმნა ტორად. ტორი არ შეიძლება გარდაიქმნას ცილინდრად, როგორც ცილინდრი ტორად, რადგან პირველ შემთხვევაში საჭირო იქნებოდა რომელიმე ადგილას ტორის ზედაპირის გაკვეთა (ირღვევა ურთიერთ უწყვეტობა); მეორე შემთხვევაში კი უნდა შეიწებოს ცილინდრის ზედაპირები (არ სრულდება ურთიერთ ცალსახობის პირობა).

ყველა ასეთი გადაქმნისას შემოსაზღვრული გეომეტრიული ფიგურის ზედაპირი უნდა განვიხილოთ როგორც მტკიცე, ელასტიური აფსკი, რომელიც ექვემდებარება ღუნვას, ჭიმვას, კუმშვას მაგრამ არ იხევა და არ იწებება.

ყველა ზემოთ თქმულიდან შეიძლება დავასკვნათ: ტოპოლოგიური გარდაქმნით მარტივი შეუკრავი მრუდი შეიძლება აისახოს წრფეზე, ხოლო მარტივი შეუკრავი ზედაპირი კი წრფოვანზე. ნებისმიერი ჩაკეტილი წირი

შეიძლება აისახოს წრეწირზე, ნებისმიერი ფორმის შეკრული მოხაზულობის ზედაპირი კი -სფეროზე.

თვალსაჩინოებისათვის, F ფიგურის ტოპოლოგირურად შესაბამისი Φ ფიგურის მიღება შესაძლებელია F ფიგურის ცენტრალური დაგეგმილებით ნებისმიერ α ზედაპირზე (ნახ. 5). აღსანიშნავია, რომ ფიგურებს შორის ტოპოლოგიური შესაბამისობის დასამყარებლად ხშირად იყენებენ გეგმილს. მაგალითად, ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება დავამყაროთ თვალსაჩინო ტოპოლოგიური შესაბამისობა სფეროს წერტილებსა და კუბის ზედაპირის წერტლებს შორის. ამისათვის, ისინი ისე განვალაგოთ, რომ სფეროსა და კუბის ცენტრები ერთმანეთს დაემთხვას და საძიებელი შესაბამისობა დავამყაროთ საერთო ცენტრიდან დაგეგმილების საშუალებით. ადვილად ვრწმუნდებით, რომ ეს შესაბამისობა იქნება ურთიერთ ცალსახა და ურთიერთ უწყვეტი. დაგეგმილებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ წრის შიდა არე ტოპოლოგიურად აისახება მთელ სიბრტყეზე. ამისათვის ცენტრალური დაგეგმილებით წრის შიდა არე ავსახოთ ნახევარსფეროზე. შემდეგ, მისივე ცენტრიდან ნახევარსფერო დაგეგმილებით ავსახოთ ეკვატორის სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეზე.

ფიგურებს ეწოდება *ჰომეომორფული* ანუ არიან ერთი *ტოპოლოგიური ტიპის* თუ დასაშვებია ერთის ტოპოლოგიური გარდაქმნა მეორედ. განსაზღვრებით, ჰომეომორფული ფიგურების ყველა ტოპოლოგიური თვისებები ემთხვევა. ამიტომ გეომეტრიის იმ ნაწილისათვის, რომელიც შეისწავლის ფიგურების ტოპოლოგიურ თვისებებს, ჰომეომორფული ფიგურები ტოლფასოვანია - წარმოადგენენ ერთი და იგივე ტოპოლოგიური ნიმუშის ეგზემპლიარებს, მის სხვადასხვა მეტრიკულ განხორციელებებს.

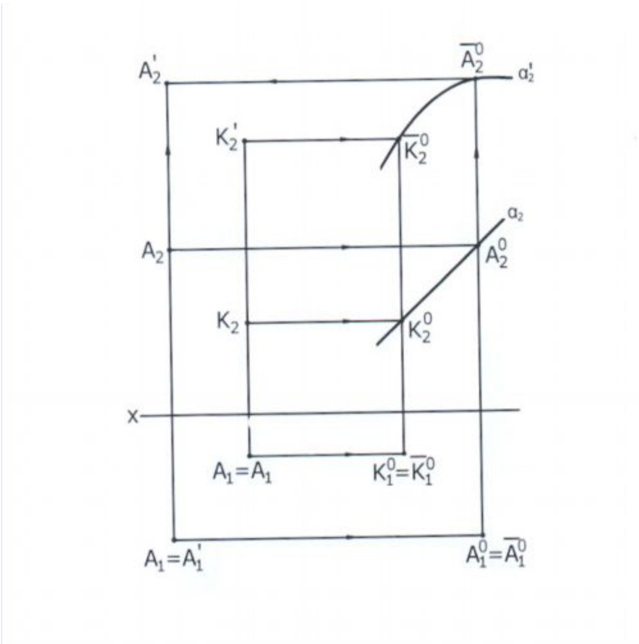
2.1.2. ტოპოლოგიური გარდაქმნების გრაფიკული წარმოდგენა

ტოპოლოგიის გამოყენება საინტერესოა მოცემული ეპიურის გარდაქმნისას, პოზიციური ამოცანების ამოხსნის გამარტივების მიზნით.

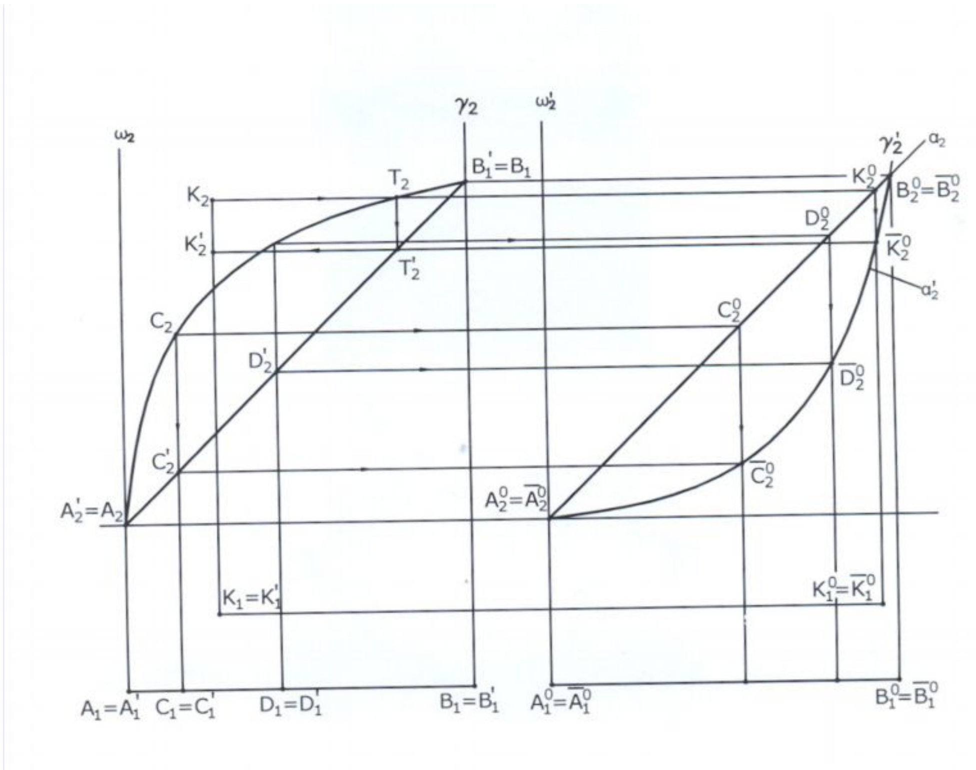
ამიტომ, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ ტოპოლოგიურ გარდაქმნებს, რომლებიც გრაფიკულად ადვილი განსახორციელებელია. ამისათვის გომეტრიულ ფიგურებს განვიხილავთ განუყრელ კავშირში იმ სამგანზომილებიან სივრცესთან, რომელშიც ის მდებარეობს. მაშინ სივრცის გარდაქმნისას (დეფორმაციისას), დეფორმირმირდება ამ სივრცეში მდებარე ფიგურაც და პირიქით ფიგურის დეფორმაცია გამოიწვევს სივრცის დეფორმაციას (გარდაქმნას). ცხადია, თუ განვახორციელებთ სივცეების სხვადასხვა დეფორმაციას, მაშინ გვექნება შესაძლებლობა მოცემული ფიგურის ისეთ ფიგურაზე ასახვისა, რომელიც გაამარტივებს კონკრეტული ამოცანის ამოხსნას.

ამოცანების ამოხსნის გასამარტივებლად ტოპოლოგიური გარდაქმნის გამოყენების არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ამ გარდაქმნებით ხდება სივრცის არათანაბარი დეფორმაცია, რომელიც გვაძლევს საშუალებას შეუკრავი წირი ავსახოთ წრფეზე, ხოლო შეკრული წირი კი წრეწირზე. მაშასადამე შესაძლებელია ერთი ფიგურის გეგმილი ავსახოთ ამ ფიგურის ანასახის გეგმილზე, რითაც მოხდება ეპიურის გარდაქმნა, რომლის საშუალებითაც შესაძლებალია ამონაცანაში, ზედაპირების თანაკვეთის შესახებ, მონაწილე მეორე ფიგურის, ანასახის გეგმილის აგება. ამოცანის ამოხსნა ხდება გარდაქმნილ სივრცეში დეფორმირებული ფიგურების გეგმილების მონაწილეობით, შემდეგ კი მიღებული შედეგები შებრუნებული გარდაქმნით ბრუნდება საწყის გეგმილზე. ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, იმისათვის რომ შესაძლებელი იყოს ტოპოლოგიური გარდაქმნის პრაქტიკული გამოყენება, აუცილებელია, რომ გარდაქმნილი და საწყისი სივრცის წერტილთა წყვილს შორის დამყარდეს შესაბამისობა, რომელიც მოიცემა გრაფიკულად.

ასეთი შესაბამისობა ადვილად მოიცემა ორი ურთიერთ პერპენდიკულარული სხივით, რომლებიც გადიან მოცემული სივრცის ყოველ წერტილზე და ორ ურთიერთშესაბამის გარდატეხის ზედაპირზე. იმის და მიხედვით, რომელი პერპენდიკულარული სხივები და გარდატეხის



ნახ. **6.** შესაბამისი წერტილის აგების გრაფიკული სქემა.



ნახ. **7.** წირის მონაკვეთზე ასახვა ტოპოლოგიური გარდაქმნის გამოყენებით.

ზედაპირები იქნება არჩეული, მივიღებთ სხვადასხვა სახის ტოპოლოგიურ გარდაქმნებს.

დავუშვათ, საწყისი **R** სივრცის **A** წერტილს შეესაბამება დეფორმირებული **R'** სივრცის **A'** წერტილი, რომლის აგების გრაფიკული სქემა მოცემულია ნახ.6-ზე.

A და **A'** წერტილების შესაბამისობა დამყარებულია ურთიერთ პერპენდიკულარული $\mathbf{AA^1}$ და $\mathbf{AA^0}$ სხივებით და ორი ფრონტალურად პროექცირებადი გარდატეხის ზედაპირებით- $\alpha(\alpha_2)$ სიბრტყითა და $\alpha'(\alpha_2')$ ცილინდრული ზედაპირით (ნახ.6). ამ შემთხვევაში, **AA'** სხივი პერპენდიკულარულია $\mathbf{\Pi_1}$ სიბრტყის, მეორე $\mathbf{AA^0}$ სხივი კი პარალელურია **x** ღერძის. მეორე სხივი იკვეთება $\alpha(\alpha_2)$ გარდატეხის სიბრტყესთან $\mathbf{A^0(A_1^0A_2^0)}$ წერტილში და მისგან აირეკლება პირველი სხივის პარალელური მიმართულებით. ეს არეკლილი სხივი იკვეთება გარდატეხის $\alpha'(\alpha_2')$ ცილინდრულ ზედაპირთან $\overline{A}^{0}(\overline{A}_1^{0}\overline{A}_2^{0})$ წერტილში და მისგან აირეკლება **x** ღერძის პარალელური მიმართულებით. ამ სხივის პირველ სხივთან გადაკვეთით მივიღებთ $\mathbf{A'(A_1'A_2')}$ წერტილს**,** რომელიც მოცემული $\mathbf{A(A_1A_2)}$ წერტილის შესაბამისია.

ამრიგად, განხილული სივრცის ტოპოლოგიური გარდაქმნით **A** წერტილი გადაინაცვლებს $\mathbf{\Pi_1}$ -ის პერპენდიკულარული მიმართულებით.

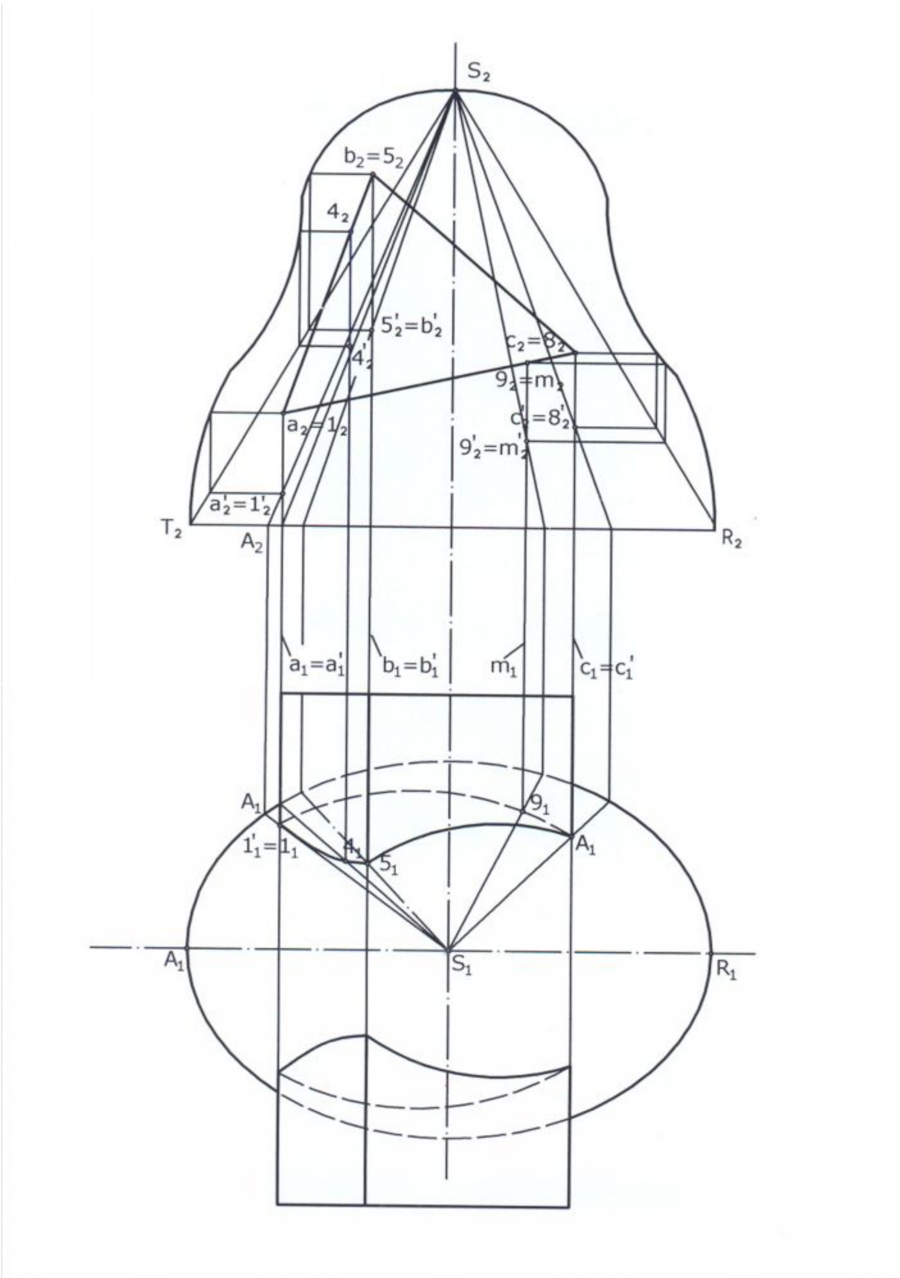
ნახ. 7 -ზე **ACB** მრუდი ასახულია **A'B'** მონაკვეთზე ისე, რომ წერტილთა შესაბამისი წყვილები განლაგებულია $\mathbf{\Pi_1}$-ის პერპენდიკულარულ წრფეებზე, შემდეგ კი განსაზღვრულია ასეთი ასახვით დადგენილი ტოპოლოგიური გარდაქმნა, რომელიც მოიცემა გარდატეხის $\alpha(\alpha_2)$ სიბრტყით და გარდატეხის $\alpha'(\alpha_2')$ ცილინდრით, რითაც უზრუნველყოფილია ეს ტოპოლოგიური გარდაქმნა. ნებისმიერი **K** წერტილის შესაბამისი **K'** წერტილის აგება (და პირიქით, **K'** წერტილის შესაბამისი **K** წერტილის აგება) შესამლებელია ამ ტოპოლოგიით შესაბამისი **ACB** მრუდითა და **A'B'** მონაკვეთით, კერძოდ, წერტილთა შესაბამისი $\mathbf{T \in ACB}$ და $\mathbf{T' \in (A'B')}$ წყვილის გამოყენებით.

ტოპოლოგიური გარდაქმნის ამ სახის გამოყენება მხაზველებითი გეომეტრიის ამოცანების ამოხსნისას წარმოდგენილია 1, 2, 3 ამოცანებში **(ნახ. 8, 9, 10).**

2.1.3. ნებისმიერი მოხაზულობის ზედაპირისა და პრიზმის თანკვეთის წირის აგება

ამოცანა 1. მოცემულია მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსური კვეთების მქონე ნებისმიერი ფრონტალური მოხაზულობის ზედაპირი და **Π_2**-ზე პროექცირებადი პრიზმა. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (ნახ.8).

მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის წირის ფრონტალური გეგმილი ცნობილია - ის პრიზმის ფრონტალურ გეგმილს ემთხვევა. მისი ჰორიზონტალური გეგმილის ასაგებად, მოცემული მრუდი ზედაპირი ავსახოთ წრფოვანზე - კონუსურ ზედაპირზე **S** წვეროთი და ფუძით, რომელიც ემთხვევა მოცემული მრუდწირულ ზედაპირის ფუძეს. ამისათვის საკმარისია მრუდწირული ზედაპირის ფრონტალური მოხაზულობა ავსახოთ კონუსის ფრონტალურ მოხაზულობაზე, ამასთან მოხაზულობების შესაბამის წერტილებად მივიღოთ ის წერტილები, რომლებიც მდებარეობენ **Π_1** სიბრტყის პერპენდიკულარულ წრფეებზე. ასეთი ასახვით მოხდება ტოპოლოგიური გარდაქმნა, რომლითაც მოხდება სივრცის არათანაბარი შეკუმშვა **Π_1** სიბრტყის პერპენდიკულარული მიმართულებით (იხ. ნახ.6,7). ცხადია, შესაბამისი წერტილების ყოველი წყვილის ჰორიზონტალური გეგმილები დაემთხვევიან და გარდაქმნის შედეგად, ნებისმიერი ფიგურის ჰორიზონტალური გეგმილი დარჩება უცვლელი. სივრცის ასეთი დეფორმაცია უზრუნველყოფილი იქნება გარდატეხის $\alpha'(\alpha_2')$ ცილინდრული ზედაპირით, რომლის აგებაც არ არის საჭირო, რადგანაც მოცემული და კონუსური ზედაპირების მოხაზულობების შესაბამისი წერტილების საშუალებით შესაძლებელია ავაგოთ ამ ტოპოლოგიური



ნახ.8. ნებისმიერი მოხაზულობის ზედაპირისა და პრიზმის თანაკვეთის წირის აგება ტოპოლოგიური გარდაქმნის გამოყენებით.

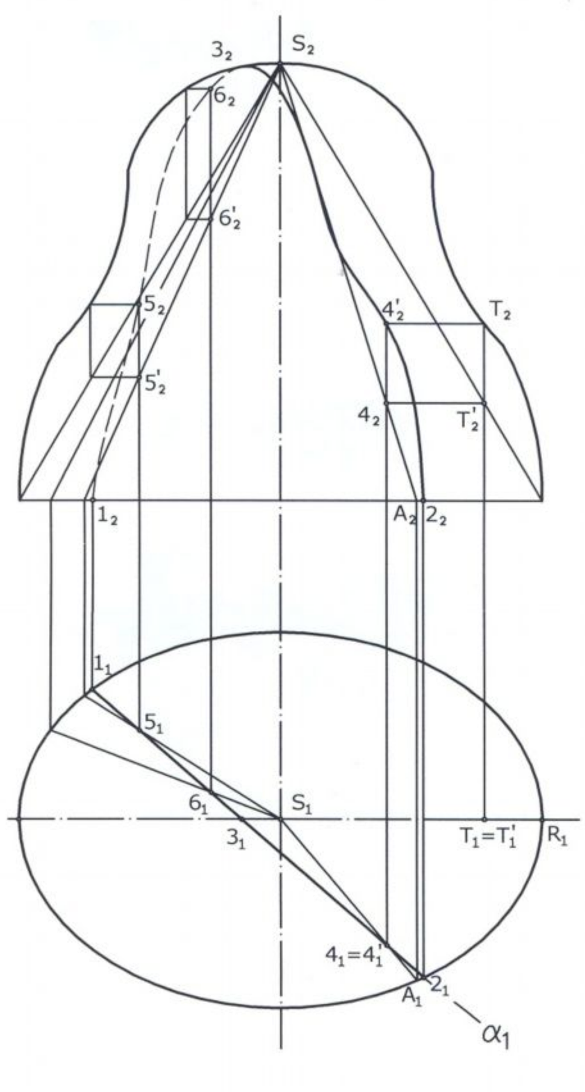
გარდაქმნის ნებისმიერი წერტილის შესაბამისი წერტილი.

ამგვარად, მრუდწირული ზედაპირის დეფორმაციის შედეგად მივიღეთ კონუსური ზედაპირი, ასეთი ასახვით განსაზღვრული სივრცის ტოპოლოგიური გარდაქმნით ფრონტალურად პროექცირებადი **a,b,c** წიბოები და ნებისმიერი მსახველი, მაგალითად, **m** აისახება მათ მიმართ პარალელურ **a',b',c',m'** წრფეებზე.

მაშასადამე, ტოპოლოგიური გარდაქმნით მოცემული ზედაპირების ნაცვლად გვაქვს კონუსის ზედაპირი და ახალი პრიზმული ზედაპირი, რომელთაც ფრონტალურად პროექცირებადი მსახველები გააჩნია, რითაც ამოცანა დაიყვანება ტრივიალურ, კონუსური ზედაპირის ჰორიზონტალური გეგმილის წერტილების აგების ამოცანაზე, თუ ცნობილია მათი ფრონტალური გეგმილები. მაგალითად, $\mathbf{1(1_2)}$ თანაკვეთის წერტილის ჰორიზონტალური $\mathbf{1_1}$ გეგმილის ასაგებად, $\mathbf{1(1_2)}$ წერტილის შესაბამის $\mathbf{1'(1_2')}$ წერტილზე (რომლის აგების განხორციელება ნახ. **8**-ზე ისრებითაა ნაჩვენები) გავავლოთ კონუსური ზედაპირის $\mathbf{SA(S_2A_2)}$ მსახველი. მსახველის ჰორიზონტალური $\mathbf{S_1A_1}$ გეგმილისა და $\mathbf{1_2'}$ წერტილზე გამავალი ბმის წრფის გადაკვეთით მივიღებთ $\mathbf{1_1=1_1'}$ წერტილს, რომელიც ეკუთვნის მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის წირის ჰორიზონტალურ გეგმილს. ანალოგიურადვეა აგებული საძიებელი თანაკვეთის წირის სხვა დარჩენილი წერტილების ჰორიზონტალური გეგმილები, რომელთა შეერთებითაც მივიღებთ საძიებელ წირს.

2.1.4. ნებისმიერი მოხაზულობის ზედაპირისა და სიბრტყის თანკვეთის წირის აგება.

ამოცანა 2. მოცემულია მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსური კვეთების მქონე ნებისმიერი ფრონტალური მოხაზულობის ზედაპირი და ჰორიზონტალურად პროექცირებადი $\alpha(\alpha_1)$ სიბრტყე. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (ნახ. 9).



ნახ.9. ნებისმიერი მოხაზულობის ზედაპირისა და ჰორიზონტალურად პროექცირებადი სიბრტყის თანკვეთის წირის აგება.

ამოცანის ამოსახსნელად მოცემული მრუდწირული ზედაპირი ავსახოთ მისივე წვეროსა და ფუძის მქონე კონუსურ ზედაპირზე. ამისათვის საკმარისია მრუდწირული ზედაპირის ფრონტალური მოხაზულობა ავსახოთ კონუსის ფრონტალურ მოხაზულობაზე ისე, რომ შესაბამისი წერტილების წყვილი მდებარეობდნენ $\mathbf{\Pi}_1$ სიბრტყის პერპენდიკულარულ წრფეებზე (იხ. ნახ. 6,7). ასეთი ასახვით დამყარდება ტოპოლოგიური ასახვა, რომლითაც მოხდება დეფორმაცია $\mathbf{\Pi}_1$ სიბრტყის პერპენდიკულარული მიმართულებით. ასეთი გარდაქმნის არჩევა განპირობებულია თანაკვეთაში მონაწილე ჰორიზონტალურად პროექცირებადი $\alpha(\alpha_1)$ სიბრტყის გამო, რომელიც ასეთი ტოპოლოგიური გარდაქმნით აისახება თავის თავზე, რითაც საგრძნობლად შემცირდება გრაფიკული აგებები. ამრიგად ტოპოლოგიური გარდაქმნით მოცემული ზედაპირების ნაცვლად გვაქვს მათი ანასახები: კონუსური ზედაპირი **S** წვეროთი და $\alpha(\alpha_1)\perp\mathbf{\Pi}_1$ სიბრტყე. რითაც მოცემული ამოცანა დაიყვანება ტრივიალურ, კონუსური ზედაპირის ფრონტალური გეგმილის წერტილების აგების ამოცანაზე, როცა ცნობილია მათი ჰორიზონტალური გეგმილები. მაგალითად, წერტილ 4-ის ფრონტალური $\mathbf{4_2}$ გეგმილის ასაგებად, მის $\mathbf{4_1=4_1'}$ ჰორიზონტალურ გეგმილზე გავავლოთ კონუსის $\mathbf{S_1A_1}$ მსახველი, ავაგოთ მისი ფრონტალური გეგმილი $\mathbf{S_2A_2}$, რომლის გადაკვეთით ბმის ხაზთან მივიღებთ $\mathbf{4_2'}$ წერტილს; შებრუნებული ტოპოლოგიური გარდაქმნით $\mathbf{4_2'}$ წერტილი ავსახოთ მის შესაბამის $\mathbf{4_2}$ წერტილზე. ასახვასთან დაკავშირებული აუცილებელი აგებები შესრულებულია $\mathbf{T_2'}$ და $\mathbf{T_2}$ შესაბამისი წერტილების გამოყენებით, რომლებიც ეკუთვნიან ტოპოლოგიურად შესაბამის კონუსის მოხაზულობას და მრუწირულ ზედაპირს (აგებები ნახ.9-ზე ნაჩვენებია ისრებით).

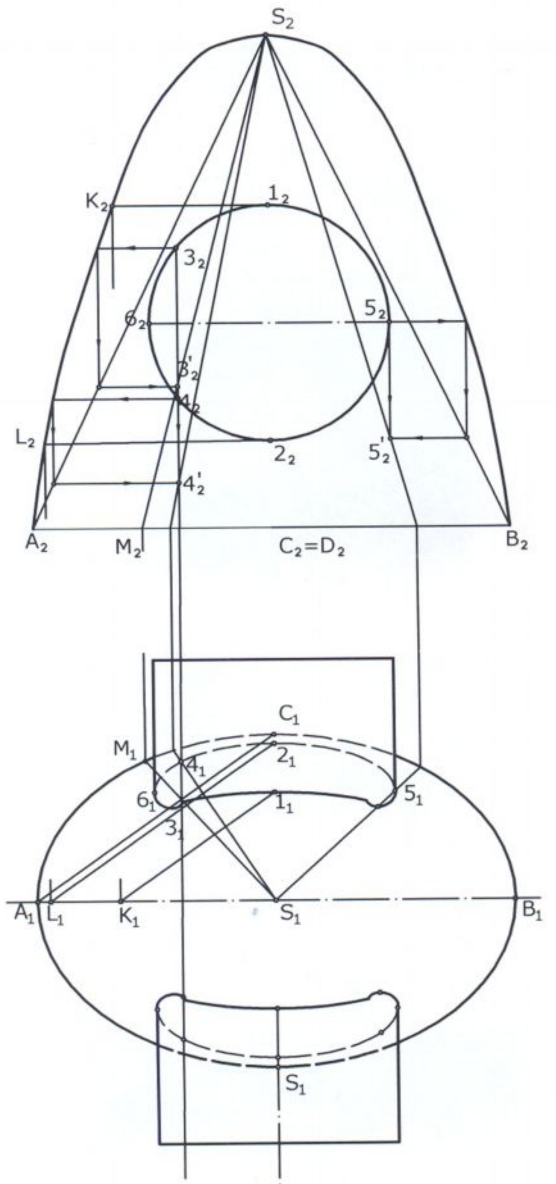
ანალოგიურადვე აგებულია ფრონტალური გეგმილები სხვა წერტილებისთვისაც, გარდა **1,2,3** წერტილების $\mathbf{1_2}$, $\mathbf{2_2}$, $\mathbf{3_2}$ ფრონტალური გეგმილებისა, რომელთა აგებისთვისაც არაა საჭირო ტოპოლოგიური გარდაქმნის გამოყენება.

ავღნიშნოთ, რომ ტოპოლოგიური გარდაქმნით პოზიური ამოცანების ამოხსნა მარტივდება იმ შემთხვევაშიც, როცა თანაკვეთაში მეორე რიგის ზედაპირები მონაწილეობს.

2.1.5. ელიფსური პარაბოლოიდისა და ცილინდრის თანაკვეთის წირის აგება

ამოცანა 3. მოცემულია ელიფსური პარაბოლოიდი და ფრონტალურად პროექცირებადი ცილინდრი. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (ნახ. 10).

ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ ტოპოლოგიური გარდაქმნით, რომელიც ელფსურ პარაბოლოიდს ასახავს მისივე წვეროსა და ფუძის მქონე კონუსურ ზედაპირზე და მოახდენს სივრცის არათანაბარ დეფორმაციას $\mathbf{\Pi_1}$ სიბრტყის პერპენდიკულარული მიმართულებით (იხ. ნახ. 6,7). ამისათვის საკმარისია პარაბოლოიდის ფრონტალური მოხაზულობა ავსახოთ კონუსის ფრონტალურ მოხაზულობაზე. რადგანაც არათანაბარი დეფორმაციის მიმართულება $\mathbf{\Pi_1}$ სიბრტყის პერპენდიკულარულია, ამიტომ მოცემული ზედაპირების ჰორიზონტალური გეგმილები დარჩება უცვლელი. გამოყენებული გარდაქმნით ცილინდრის (თანაკვეთაში მონაწილე მეორე ზედაპირის) მსახველები აისახება მათსავე პარალელურ წრფეებზე. ამგვარად, გარდაქმნის შედეგად, მოცემული ზედაპირების ნაცვლად გვაქვს გვაქვს კონუსის ზედაპირი და ფრონტალურად პროექცირებადი ცილინდრი, მაშასადამე, ამოცანა დაყვანილია კონუსის ჰორიზონტალური გეგმილის წერტილების აგებაზე, როცა ცნობილია მათი ფრონტალური გეგმილები. მაგალითად, მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის წერტილ 3-ის $\mathbf{3_1}$ ჰორიზონტალური გეგმილის ასაგებად, $\mathbf{3_2}$ ფრონტალური გეგმილის შესაბამის $\mathbf{3_2'}$ წერტილზე გავავლოთ კონუსის $\mathbf{SM(S_2M_2)}$ მსახველი (რომლის აგებაც ნახაზზე ისრებითაა ნაჩვენები). $\mathbf{S_1M_1}$ ჰორიზონტალური გეგმილისა და $\mathbf{3_2'}$ წერტილზე გამავალი ზმის წრფის თანაკვეთით მივიღებთ $\mathbf{3_1=3_1'}$



ნახ.10. ელიფსური პარაბოლოიდისა და ცილინდრის თანაკვეთის წირის აგება ტოპოლოგიური გარდაქმნის გამოყენებით.

წერტილს. ანალოგიურადვეა აგებული თანაკვეთის წირის სხვა ჰორიზონტალური გეგმილები, გარდა **$1(1_1 1_2)$** და **$2(2_1 2_2)$** წერტილებისა, რომელთათვისაც ტოპოლოგიური გადაქმნის გამოყენება არაა საჭირო. ეს წერტილები მდებარეობენ ელიფსური პარაბოლოიდის კვეთებზე - ელიფსებზე, რომლის წვეროებია **K** და **L** წერტილები. რადგანაც ელიფსური პარაბოლოიდის კვეთები მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსებია, ამიტომ ელიფსური პარაბოლოიდის ყოველი ორი კვეთა-ელიფსები **K** და **L** წვეროებით იქნება მსაგვსი და მსგავსად განლაგებული ფუძის **ABCD** ელიფსის მიმართ. ამიტომ **$(K_1 1_1)||(L_1 2_1)||(A_1 C_1)$.**

2.2. პოზიციური ამოცანების ამოხსნა კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით

კვადრატული გარდაქმნების მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ზოგიერთი ზედაპირების თანაკვეთის წირების ასაგებად. მისი გამოყენებისას შესაძლებელია თავი ავარიდოთ ზედაპირისა და სიბრტყის თანაკვეთით მიღებული ლეკალური წირების აგებას და ისინი შევცვალოთ შესაბამისი წრფეებით. ეს მნიშვნელოვნად ამარტივებს აგებებს და ზრდის ამონახსნის სიზუსტეს.

2.2.1. R_3 ბინარულ მოდელებში კვადრიკების მოდელირების ზოგადი პრინციპები

R_3 - ის ალგებრული ზედაპირების მოდელირება და ამის გამო პროქციული მოდელის სიბრტყეში წარმოქმნილი გარდაქმნა განვიხილოთ სივრცის მოდელის სიბრტყეზე ბიცენტრალური დაგეგმილების საფუძველზე. ავღნიშნოთ, რომ მიღებული შედეგები სამართლიანი იქნება უფრო ზოგადი სქემებისათვისაც, რომლებიც მიიღება **R_3** ბინარული მოდელების კონსტრუირების პრინციპების საფუძველზე.

განვიხილოთ წრფივ ბინარულ მოდელებში ზედაპირების ასახვის საკითხები. ყოველი $\alpha \subset R_3$ სიბრტყე $\mathbf{R_{2+1}}$ ბინარულ მოდელებში მოდელირდება წრფივი წერტილოვანი შესაბამისობებით: კოლინეაციით (ზოგადი სახით) და მისი კერძო სახეებით-აფინური შესაბამისობით, ჰომოლოგიით, ნათესაური შესაბამისობით და ა.შ. აგრეთვე სამართლიანია შებრუნებული მტკიცებაც: ყოველი კოლინეაცია, რომლითაც დასაშვებია გადასვლა ამა თუ იმ $\mathbf{R_3}$ ბინარულ მოდელში (ანუ როცა ამ კოლინეაციის შესაბამისი წერტილები განლაგებულია მოდელის ძირითადი ძნულების ბმის შესაბამის წრფეებზე), გამოსახავს რაღაც $\alpha \subset R_3$ სიბრტყეს. ეს შემთხვევა ელემენტერულია, ცნობილია და განმარტებებს არ საჭიროებს.

ახლა განვიხილოთ ყველაზე ზოგადი შემთხვევა- **n**-ური რიგის $\mathbf{F^n}$ ზედაპირის მოდელირება, რომლიდანაც როგორც, კერძო შემთხვევა, გამომდნარეობს კვადრიკების მოდელირება. დავამტკიცოთ, რომ **n**-რიგის ზედაპირი, რომელიც არ გადის $\mathbf{S_1}$ და $\mathbf{S_2}$ ცენტრებზე, მოდელის სიბრტყეში იძლევა განსაზღვრულ **(n,n)**-ნიშნის წერტილოვან **n**-ური რიგის არაწრფივ გარდაქმნას.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია $\mathbf{F^n}$ ზედაპირი. $\mathbf{S_1}$ ცენტრის მქონე ძნულის ყოველი მაგეგმილებელი სხივი $\mathbf{F^n}$ ზედაპირს გადაკვეთს $\mathbf{A^1,A^2,...,A^n}$ წერტილებში (ნამდვილ ან წარმოსახვით წერტილებში), რომელთაც Π_{12}-ზე ექნებათ ერთი $A_1^1, A_1^2,\ldots,A_1^n$ გეგმილები. $\mathbf{S_2}$ ცენტრიდან ეს წერტილები Π_{12}-ზე დაგეგმილდება **n** კოლინეარულ $A_2^1, A_2^2,\ldots,A_2^n$ წერტილებში. მაშასადამე, ვღებულობთ, რომ $\mathbf{\Pi_1}$ ველის ყოველ A_1^1 წერტილს $\mathbf{\Pi_{12}}$ მოდელის სიბრტყეზე შეესაბამება $\mathbf{\Pi_2}$ ველის **n** წერტილი $A_2^1, A_2^2,\ldots,A_2^n$ და პირიქით. ამრიგად, დამტკიცებულია რომ $\mathbf{F^n}$ ზედაპირი მოდელირდება **(n,n)**-მნიშვნელობის გარდაქმნით.

ახლა დავამტკიცოთ მეორე ნაწილი, რომ გარდაქმნა იქნება **n**-რიგის. ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ, რომ წრფოვან წერტილთა $\mathbf{k_1}$ მწკრივს $\mathbf{\Pi_1}$ ველიდან შეესაბამება Π_2 ველის **n**-ური რიგის k_2^n წირი და პირიქით.

მართლაც, S_1 ცენტრზე გავავლოთ ნებისმიერი სიბრტყე. ის F^n ზედაპირს გადაკვეთს **n**-რიგის k^n წირზე, რომელიც Π_1-ზე დაგეგმილდება წრფოვან წერტილთა მწკრივად (შესაძლებელია ნამდვილ და წარმოსახვით წერტილთა არსებობაც, მაგრამ ეს მსჯელობის მსვლელობაზე არ ახდენს გავლენას). იგივე k^n წირი S_2 ცენტრიდან დაგეგმილდება Π_2 ველის k_2^n წირზე. მასადამე, მივიღეთ რომ, Π_{12} ველის ∞^2 წრფეს (S_1 ძნულის სიბრტყეების Π_1 სიბრტყესთან კვეთებს) შეესააბმება Π_2 ველის k_2^n წირი და პირიქით.

მიღებული მრავალსახა მაღალი რიგის გარდაქმნები შესაძლებელია შეიცავდნენ წარმოსახვითი ელემენტების არეებს, S_1 და S_2 ძნულებში შესაძლებელია იყოს სხივების ისეთი სიმრავლე, რომლებიც არ კვეთს მაგეგმილებელ ზედაპირს. ასეთ შემთხვევაში, გარდაქმნის ნამდვილ წერტილთა არე Π_{12} -ზე შემოსაზღვრული იქნება მოცემული ზედაპირის მოხაზულობის წირით.

ავღნიშნოთ მიღებული გარდაქმნების კიდევ ერთი თვისება. შესაბამისი $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^n$ და $A_2^1, A_2^2, \ldots, A_2^n$ წერტილთა ჯგუფები ძირითადი მაგეგმილებელი ძნულების შესაბამის ბმის წრფეებზე მდებარეობენ, იმის და მიხედვით, თუ მოდელების რომელ ტიპს მიეკუთვნება განსახილველი დაგეგმილების სქემა.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს ურთიერთმრავალსახა წერტილოვანი ასახვის შემდეგი თვისება, რომელიც ახდენს მოდელირებადი სივრცის ალგებრული ზედაპირის ინტერპრეტაციას: ყოველ ასეთ ასახვას უნდა ჰქონდეს პროექციულად შესაბამისი პირველი რიგის $O_1\{l_1...\}$ და $O_2\{l_2...\}$ ძნულების წყვილი და ამ ძნულების ყოველი შესაბამისი წრფეები უნდა იყოს შესაბამისი **(n,n)** გარდაქმნაშიც**.** მაშასადამე, თუ **(n,n)** გარდაქმნაში ყოველ m_1 წრფეს შეესაბამება m_2^n წირი, მაშინ $l_1 \supset O_1$ წრფეს შეესაბამება $l_2 \supset O_2$ წრფე, რომელიც **(n,n)** გარდაქმნაში შეიძლება ჩაითვალოს **n**-ჯერად წრფედ, ანუ l_2^n წრფე დაიშალა **n** ერთმანეთზე დამთხვეულ წრფედ. სივრცითი შინაარსით

კი, {l_1...} და {l_2...} წრფეები გამოსახავენ $\mathbf{F^n}$ ზედაპირის $(\mathbf{S_1S_2})$ წრფეზე გამავალ სიბრტყეებთან კვეთის წირებს.

თუ $\mathbf{F^n}$ ზედაპირი გადის $\mathbf{S_1}$-ზე (ან $\mathbf{S_2}$-ზე), მაშინ გარდაქმნის მნიშვნელობა მცირდება **(n-1,n)**-მდე, ხოლო თუ $\mathbf{F^n}$ ზედაპირი გადის ორივე ცენტრზე, მაშინ გარდაქმნა იქნება **(n-1,n-1)-**მნიშვნელობის. მნიშვნელობის შემცირების ეს თვისება განზოგადოებული სახით შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: თუ $\mathbf{S_1}$ ცენტრი (ან $\mathbf{S_2}$**)**, ან ორივე ცენტრი $\mathbf{S_1}$ და $\mathbf{S_2}$ ემთხვევა $\mathbf{F^n}$ ზედაპირის **k-**ჯერად წერტილს, მაშინ $\mathbf{\Pi_{12}}$ მოდელის სიბრტყეში წარმოქმნილი გარდაქმნა შესაბამისად იქნება **(n-k,n)-**მნიშვნელობის ან **(n-k,n-k)-** მნიშვნელობის. აქედან გამომდინარე, შესაძლებელია გარდაქმნის მნიშვნელობის მნიშვნელოვნად შემცირება, ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია ურთიერთცალსახობამდე დაყვანა.

ყოველივე ზემოთ თქმულისათვის სამართლიანია შებრუნებული მკიცება: ნებისმიერი **(n,n)-**მნიშვნელობის **n-**რიგის გარდაქმნა, ნებისმიერი $\mathbf{R_3}$ ბინარული მოდელიდან (ანუ გარდაქმნის წერტილთა ყოველი წყვილი მდებარეობს მოდელის შესაბამის ბმულობის წრფეებზე) ახდენს $\mathbf{F^n}$ ზედაპირის მოდელირებას. კერძო შემთხვევებისათვის გამომდინარეობს: ნებისმიერი **(n-k,n-*l*)-**ნიშვნელობის **n-**რიგის გარდაქმნა ახდენს $\mathbf{F^n}$ ზედაპირის მოდელირებას, ხოლო დაგეგმილების ცენტრი ინცინდენტურია ზედაპირის შესაბამისად **k-**ჯერადი და ***l*-**ჯერადი წერტილებისა.

ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით შეიძლება ადვილად დავასკვნათ, რომ კვადრიკები მოდელირდება წერტილოვანი კვადრატული გარდაქმნებით. ზოგად შემთხვევაში, წარმოიქმნება **(2,2)-**მნიშვნელობის გარდაქმნა, რომლის ნამდვილი წერტილები შეიძლება განლაგებული იყოს მოდელის სიბრტყის შემოსაზღვრულ არეში, მაგრამ კერძო შემთხვევაში შეიძლება შეავსოს მოდელის ველი (თუ დაგეგმილების ცენტრი და მოდელის სიბრტყე მოდელირებული კვადრიკის მიერ გაყოფილი სივრცის სხვადასხვა ნაწილებში მდებარეობს ან ეკუთვნის ამ კვადრიკას). წირი, რომელიც შემოსაზღვრავს ნამდვილ წერტილთა მდებარეობის არეს კონიკას

წარმოადგენს და თავისი წარმოშობით დაკავშირებულია კვარდიკას კონტურის ასხვასთან.

კვადრიკებით მოცემულ კვადრატულ გარდაქმნებს შეიძლება ჰქონდეს სხვადასხვა მნიშვნელობა:

ა) დაგეგმილების ცენტრები მდებარეობენ კვადრიკას გარეთ. ამ შემთხვევაში გარდაქმნა **(2,2)-**მნიშვნელობისაა $\mathbf{\Pi_1}$ და $\mathbf{\Pi_2}$ ველებში ნამდვილ წერტილთა განლაგების შემოსაზღვრული არით;

ბ) ერთი ცენტრი, მაგალითად $\mathbf{S_1}$ კვადრიკას ინციდენტურია, მეორე კი კვადრიკას გარეთაა. გარდაქმნა **(1,2)-**მნიშვნელობისაა, $\mathbf{\Pi_2}$ ველში- ნამდვილ წერტილთა შემოსაზღვრული არით. $\mathbf{\Pi_1}$ ველი შემოუსაზღვრავია;

გ) ორივე ცენტრი კვადრიკას ინციდენტურია. გარდაქმნა **(1,1)-**მნიშვნელობისაა, ნამდვილ წერტილთა შემოუსაზღვრავი არით;

დ) ერთი ცენტრი მდებარეობს კვადრიკაში, მეორე კი ზედაპირზე. გარდაქმნა **(1,2)-**მნიშვნელობისაა, ნამდვილ წერტილთა შემოუსაზღვრავი არით.

ადვილი დასამტკიცებელია შებრუნებულიც: **(2,2)-**მნიშვნელობის ცენტრალური ასახვა, რომელიც დაკავშირებულია ბინარულ მოდელთან, მეორე რიგის ზედაპირს - $\mathbf{F^2}$ კვადრიკას გამოსახავს.

მიღებულ შედეგებს, გარკვეული პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია ზოგიერთი იმ ზედაპირის გამოსაკვლევის გასაადვილებლად, რომლებიც გამოისახება დაგეგმილების აღიარებული მეთოდებით. მაგალითად, ვთქვათ მონჟის მეთოდში მოცემულია ნებისმიერი კრემონის ცენტრალური კვადრატული გარდაქმნა არასაკუთრივი ცენტრით, რომელიც განსაზღვრულია ბმის წრფის წრფეებით. უნდა განვსაზღვროთ გამოსახული კვადრიკას კონსტრუქციული თავისებურებები.

უპირველესად შევნიშნოთ, რომ გარდაქმნა კავშირშია მოდელთან (ჩაძირულია მოდელში), რადგანაც შესაბამის წერტილთა ყოველი წყვილი მდებარეობს ერთ ბმის წრფეზე. შემდეგ ზემოთ დამტკიცებული თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ გამოსახულია რომელიღაც კვადრიკა.

მაგრამ, რადგანაც გარდაქმანა არის კრემონის, ანუ **(1,1)-**მნიშვნელობის, ვასკვნით, რომ კვადრიკა გეგმილის არასაკუთრივ წერტილებზე გადის, ე.ი. გააჩნია ორი არასაკუთრივი წერტილი და არ შეიძლება იყოს ელიფსოიდი ან წრფოვანი პარაბოლოიდი. ამას გარდა, $\mathbf{F}^2$ ზედაპირი არ შეიძლება იყოს წრფოვანი. მართლაც, გარდაქმნით ერთი ველის წრფეთა ყოველ ძნულს შეესაბამება კონიკების ძნული და შესაბამისი ელემენტების ყოველი წყვილი მაგეგმილებელ სიბრტყეში მდებარე კონიკას ასახავს. იმ წრფის გამოსასახავად, რომელიც კვარდიკას ეკუთვნის, უნდა არსებობდეს შესაბამის წრფეთა უსასრულო სიმრავლე, რასაც არ აქვს ადგილი. ამრიგად, ვასკვნით, რომ მოდელირდება გადაუგვარებელი არაწრფივი კვადრიკა, რომელსაც ერთზე მეტი არასაკუთრივი წერტილი გააჩნია, ანუ ორკალთა ჰიპერბოლოიდი. როგორც ცნობილია, ცენტრალური კვარდატული გარდაქმნა შეიცავს ორმაგი წერტილების კონიკას. მოცემულ შემთხვევაში ის ახდენს ზედაპირისა და ლუწი კუთხეების ბისექტორული სიბრტყის თანაკვეთის წირის მოდელირებას. თუ კონიკა წარმოსახვითია, მაშინ გადაკვეთას ადგილი არ ექნება.

2.2.2. სივრცითი ზედაპირების ასახვა სიბრტყის კვადრატული გარდაქმნების საშუალებით

განვიხილოთ ცენტრალური (2,2)-მნიშვნელობის კვადრატული გარდაქმნა, რომელიც მყარდება მონჟის მეთოდის Π_{12} სიბრტყეში სპეციალურად შერჩეული კვადრიკებით, სადაც შესაბამისი წერტილების აგების სქემა იძლევა ნებისმიერი სიბრტყის კვადრატული გარდაქმნის შესაძლებლობას, რათა ეს გარდაქმნები გამოყენებული იქნეს პოზიციური ამოცანების ამოსახსნელად.

წინადადება 1. (2,2)-მნიშვნელობის სივრცის კვადრატული გარდაქმნით კვადრიკა აისახება კვადრიკაზე, თუ წინასახე სიმეტრიულია გარდაქმნის სიმეტრიის ω სიბრტყის მიმართ.

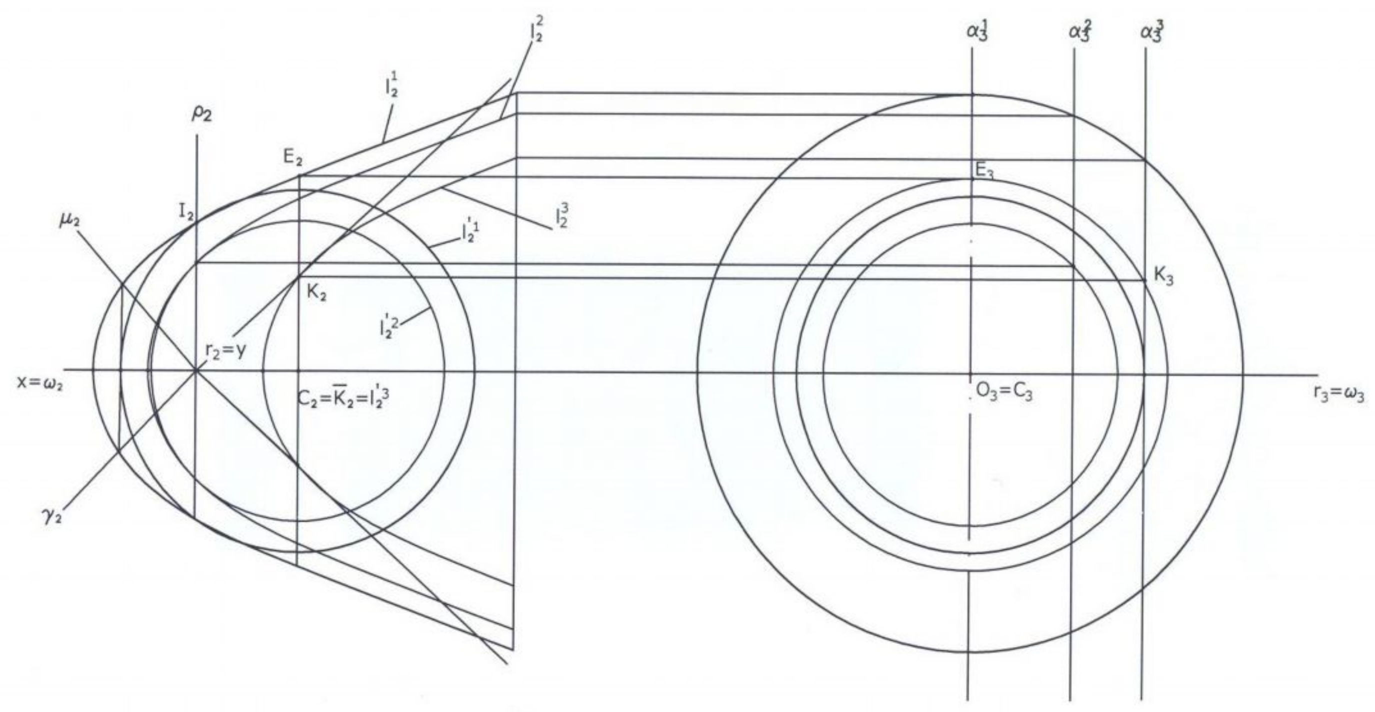
წინადადება 2. (2,2)-მნიშვნელობის სივრცის კვადრატული გარდაქმნით კვადრიკა აისახება სიბრტყეზე, უფრო ზუსტად, კვადრიკაზე, რომელიც იშლება ორ სიბრტყედ, თუ ის სიმეტრიულია გარდაქმნის სიმეტრიის ω სიბრტყის და ნამდვილ ან წარმოსახვით წრფეებზე ეხება მოცემული გარდაქმნით მხები ზედაპირის დაშლით მიღებულ მოსაზღვრე სიბრტყეებს.

დავუშვათ, გვაქვს კვადრიკა, რომელიც სიმეტრიულია გარდაქმნის სიმეტრიის სიბრტყის მიმართ და მოსაზღვრე μ და ν სირტყეებს ეხება ორ წრფეზე. მაშინ ამ კვადრიკას ანასახი იქნება გარდაქმნის სიმეტრიის ω სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული კვადრიკა (იხ. წინადადება 1), რომლის წვეროებიც შეესაბამება შეხების წრფეების წერტილებს. ცხადია, ეს წერტილები ეკუთვნის ფრონტალური სიბრტყის მკვეთ წრფეს, რომელიც გადის სიმეტრიის ω სიბრტყისთან შეხების წრფეებზე. სიმეტრიის ω სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული და ამ სიბრტყესთან თანაკვეთის წრფის მქონე კვადრიკა იქნება ამ წრფეზე გამავალი და ფრონტალური სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ორი სიბრტყე, რომლებიც გადის შეხების წრფეებზე.

საერთო სიმეტრიის სიბრტყის მქონე ორი მეორე რიგის ზედაპირის თანაკვეთის წირის აგების ამოცანების გადაწყვეტა ამ წინადადებებზე დაყრდნობით ხდება.

განვიხილოთ ზოგიერთი სახის მეორე რიგის ზედაპირის ასახვა მოცემულ გარდაქმნის სივრცეში. რადგან ბრუნვის ელიფსოიდი, რომლის ყველა წერტილი საკუთრივია, აისახება ბრუნვის ელიფსოიდზე და პოზიციური ამოცანის ამოხსნისას არ ხდება რაიმე კონსტრუქციული ცვლილება, ამიტომ ჩვენ ასეთ ასახვას არ განვიხილავთ.

განვიხილოთ ბრუნვის პარაბოლოიდის ასახვა. თუ პარაბოლოიდის ბრუნვის ღერძს მოვათავსებთ გარდაქმნის სიმეტრიის სიბრტყეში, გარდაქმნის ორმაგი ρ სიბრტყის პერპენდიკულარულად, მაშინ ბრუნვის პარაბოლოიდის ზედაპირი აისახება სფეროზე, რომელსაც იგივე სიმეტრიის სიბრტყე გააჩნია (ნახ.14). პარაბოლოიდის ფრონტალური კვეთები კონგრუენტულ პარაბოლებს წარმოადგენს, რომლებიც Π_2 სიბრტყის

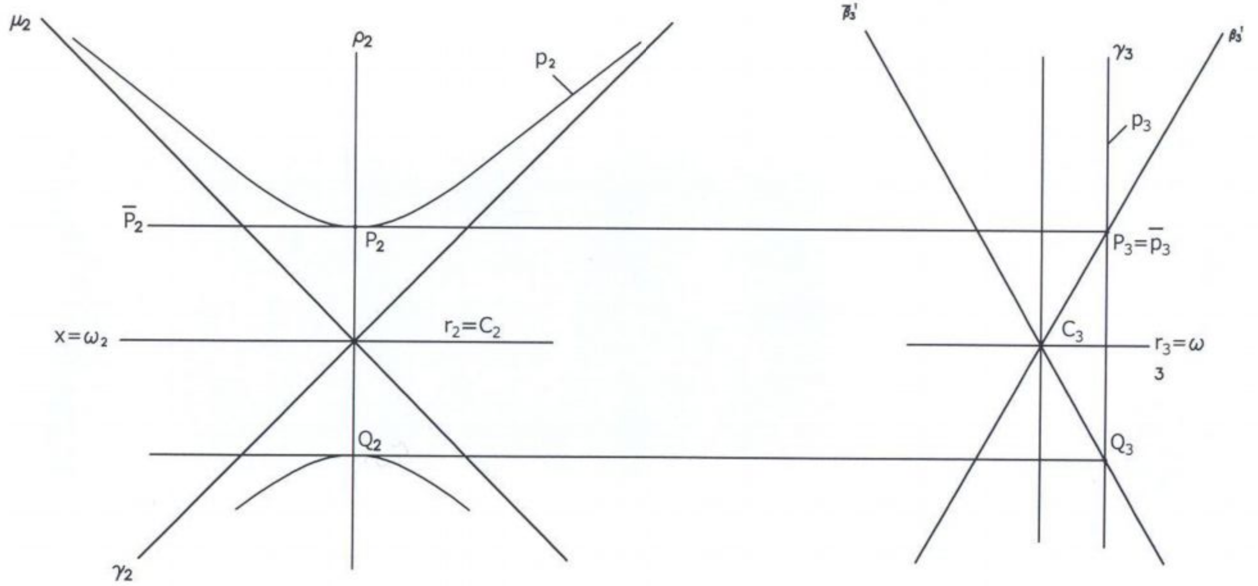


ნახ.11. ბრუნვის პარაბოლოიდის ასახვა სფეროზე.

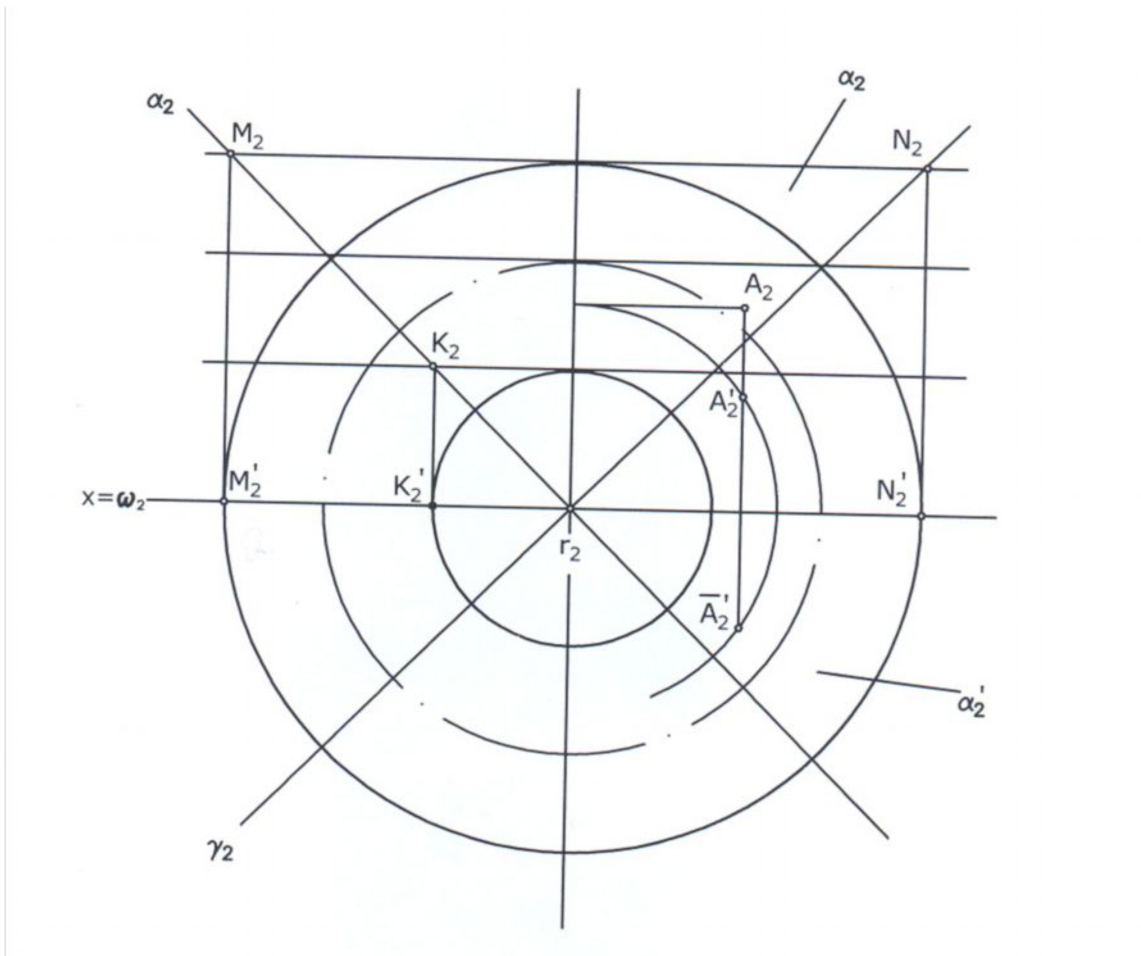
გარდაქმნით აისახება წრეწირებზე. ყოველი წრეწირი დაგეგმილდება კონცენტრულ წრეწირთა კონის სახით.

$\rho(\rho_2)$ ორმაგ სიბრტყეში მდებარეობს მოცემული პარაბოლოიდის წრიული კვეთა, რომელიც თავის თავს შეესაბამება, რის გამოც ის იქნება ახალი ზედაპირის კვეთაც. რადგანაც სივრცითი გარდაქმნის შედეგად მიღებულ ზედაპირს გააჩნია წრიული კვეთების ორი ურთიერთპერპენდიკულარული სისტემა, ამიტომ ის განისაზღვრება როგორც სფერული ზედაპირი. ნახ. 14-ზე ნაჩვენებია პარაბოლოიდის $\alpha^1(\alpha_3^1),\alpha^2(\alpha_3^2),\alpha^3(\alpha_3^3)$ სიბრტყეებთან კვეთაში მიღებული სამი პარაბოლის ასახვა. ბოლო პარაბოლა აისახება წერტილზე, რადგან მისი ყველა წერტილი მდებარეობს გარდაქმნის წარმოსახვითი წერტილების არეებში, გარდა K წერტილისა, რომელშიც პარაბოლა ეხება საზღვრის წრფეს.

მეორე რიგის კონუსი, რომლის ფრონტალური მოხაზულობის მსახველებს შორის კუთხე მართია, ხოლო ღერძი მდებარეობს ორმაგ ρ სიბრტყეში და გარდაქმნის სიმეტრიის ღერძის პერპენდიკულარულია, აისახება $\beta'(\beta_3)'$ და $\overline{\beta}'(\overline{\beta}_3)$ სიბრტყეთა წყვილზე (ნახ.15), რადგანაც ეს სწორედ ის შემთხვევაა, როცა კვადრიკა მოსაზღვრე სირტყეებს ორ წრფეზე ეხება (იხ. წინადადება 2). ამიტომ კონუსს შეესაბამება ორ სიბრტყედ დაშლილი კვადრიკა, რომლებიც იკვეთება კონუსის ფრონტალური სიმეტრიის სიბრტყისა და გარდაქმნის სიმეტრიის $\omega(\omega_2)$ სიბრტყის თანაკვეთის წრფეზე. ორმაგ $\rho(\rho_2)$ სიბრტყეში გვექნება უცვლელი წრფეთა წყვილი-კონუსის პროფილური მსახველები. გარდაქმნის შედეგად მიღებული ორი სიბრტყე გაივლის ამ მსახველებზე. ამრიგად, β კონუსი, რომლის ფრონტალურ მსახველებს შორის მართი კუთხეა და გააჩნია სიმეტრიის $\omega(\omega_2)$ სიბრტყე, აისახება კონუსის ფრონტალურ მსახველებზე გაამვალ $\beta'(\beta_3')$ და $\overline{\beta}'(\overline{\beta}_3')$ სიბრტყეებზე (ნახ.15). ცხადია, რომ ყოველი



ნახ. 12. კონუსის შესაბამისი კვადრიკა, რომელიც დაშლილია ორ სიბრტყედ



ნახ. 13. ბრუნვის ცილინდრის გარდაქმნით მიღებული

ტორული ზედაპირი

ფრონტალური სიბრტყის კონუსთან თანაკვეთით მიღებული ტოლგვერდა ჰიპერბოლა აისახება ჰორიზონტალურ წრფეთა წყვილზე.

რადგან გარდაქმნის სიმეტრიის ღერძის პერპენდიკულარული წრფე აისახება თავის თავზე, ცხადია, რომ ცილინდრული ზედაპირი, რომლის მსახველები პერპენდიკულარულია გარდაქმნის სიმეტრიის სიბრტყისა, აისახება თავის თავზე. უნდა აღინიშნოს, რომ გარდაქმნის შედეგად ცილინდრის ზედაპირის წერილები იცვლიან მდებარეობას, ისინი თითქოს სრიალებენ ცილინდრის მსახველებზე. ამრიგად, ცხადია, რომ ცილინდრის ზედაპირზე მდებარე ყოველი წირი აისახება ამავე ზედაპირის ახალ წირზე.

ბრუნვის ცილინდრი, რომლის ღერძი მდებარეობს გარდაქმნის სიმეტრიის ω სიბრტყეში და პერპენდიკულარულია გარდაქმნის ორმაგი ρ სიბრტყისა, აისახება იმავე სიმეტრიის სიბრტყის მქონე სფეროზე, რომელიც ეხება წინასახეს და რომლის ცენტრიც ემთხვევა ორკოორდინატიანი სისტემის O სათავეს. მართლაც, ცილინდრის ფრონტალური კვეთები, რომლებიც პარალელურ წრფეთა წყვილს წარმოადგენს, სივრცის გარდაქმნით აისახება წრეწირზე. ყოველი წრეწირი დაგეგმილდება კონცენტრულ წრეწირთა კონის სახით. გარდაქმნის ორმაგ $\rho(\rho_2)$ სიბრტყეში მდებარეობს ცილინდრის წრიული კვეთა, რომელიც თავის თავს შეესაბამება, რის გამოც ის იქნება ახალი ზედაპირის კვეთაც. სივრცითი გარდაქმნის შედეგად მიღებული ზედაპირისათვის ორი ურთიერთპერპენდიკულარული წრიული კვეთების არსებობა მას სფერულ ზედაპირად განსაზღვრავს.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, მეორე რიგის ზედაპირი, რომლის ერთ-ერთი სიმეტრიის სიბრტყე ემთხვევა გარდაქმნის სიმეტრიის სიბრტყეს, აისახება ახალ მეორე რიგის ზედაპირზე. ზოგად შემთხვევაში, თუ ასეთ დამთხვევას არ აქვს ადგილი, მაშინ კვადრატული გარდაქმნით მეორე რიგის ზედაპირი უნდა აისახოს მეოთხე რიგის ზედაპირზე. მაგალითად, ცილინდრული ზედაპირი, რომლის მსახველებიც გარდაქმნის

ორმაგი სიბრტყის პერპენდიკულარულია და არ კვეთს გარდაქმნის სიმეტრიის სიბრტყეს, აისახება ტორულ ზედაპირზე. მართლაც, ამ ცილინდრის ყოველი მსახველი აისახება წრეწირზე-ახალი ზედაპირის მსახველზე. ყოველი წრეწირის ცენტრი გარდაქმნის **r** ღერძზე მდებარეობს, რომელიც ახალი ზედაპირის ბრუნვის ღერძი იქნება. ორმაგ სიბრტყეში მდებარეობს ცილინდრის კვეთა-მეორე რიგის წირი, რომელიც ახალი ზედაპირის ღერძული კვეთა იქნება. თუ ეს წირი ელიფსია ან წრეწირი, მაშინ მივიღებთ შესაბამისად ელიფსურ ან წრიულ ტორულ ზედაპირს, თუ ჰიპერბოლაა-ჰიპერბოლურ, პარაბოლას შემთხვევაში კი პარაბოლურ ტორულ ზედაპირს.

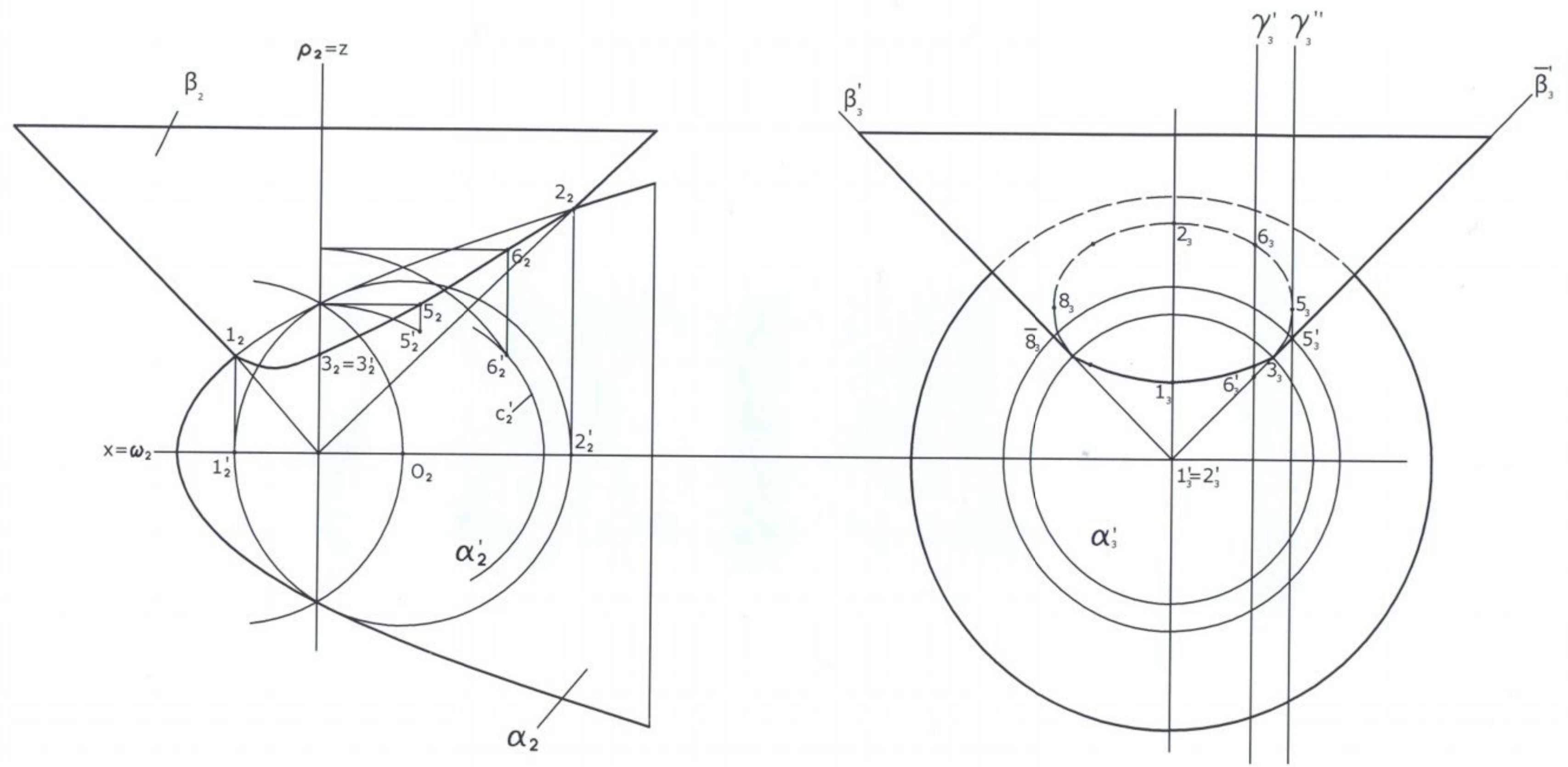
რგოლური ზედაპირი, როგორც ტორული ზედაპირის კერძო შემთხვევა, მიიღება ბრუნვის ცილინდრის გარდაქმნით, ანუ წრიული α ცილინდრი აისახება წრიულ α' რგოლზე (ნახ.13).

ამ გარდაქმნის გამოყენებით ამოხსნილია ამოცანები №4,5 (ნახ.14,15).

2.2.3. ბრუნვის პარაბოლოიდის ზედაპირისა და ზოგადი სახის კონუსის თანაკვეთის წირის აგება

ამოცანა 4. მოცემულია α ბრუნვის პარაბოლოიდი და ზოგადი სახის β კონუსი, რომლის ფრონტალური მოხაზულობის კონტურული მსახველები ქმნიან მართ კუთხეს, ავაგოთ მათი გადაკვეთის წირი (ნახ.14).

სივრცული კვადრატული გარდაქმნა ბრუნვის პარაბოლოიდს ასახავს სფეროზე (ნახ.11), ზოგადი სახის კონუსს კი ორ $\beta'(\beta'_3)$ და $\overline{\beta}'(\overline{\beta}'_3)$ სიბრტყეზე (ნახ.12). ასეთი ასახვის განსახორციელებლად, მოცემული ზედაპირების სიმეტრიის $\omega(\omega_2)$ სიბრტყე მივიჩნიოთ გარდაქმნის სიბრტყედ; გარდაქმნის $\rho(\rho_2)$ ორმაგი სიბრტყე გავატაროთ Z ღერძზე; გარდაქმნის r ღერძი იქნება Π_2-ის პერპენდიკულარული და გაივლის კონუსის T წვეროზე. ასეთ შემთხვევაში სივრცის გარდაქმნა



ნახ.14. ბრუნვის პარაბოლოიდისა და ზოგადი სახის კონუსის თანაკვეთის წირის აგება კვადრატული გარდაქმნის გამოყენებით.

შებრუნებული გარდაქმნით) მივიღებთ ორი ზედაპირის თანაკვეთის საძიებელი წირის ფრონტალურ გეგმილს.

Π_2 სიბრტყეში დაამყარებს ამ სიბრტყის კვარდატულ გარდაქმნას $x = \omega_2$ ღერძითა $O_2 = T_2$ ცენტრით, სადაც შესაბამისი წერტილები იქნება სივრცითი გარდაქმნის შესაბამისი წერტილების ფრონტალური გეგმილები.

სივრცის გარდაქმნის განხორციელების შემდეგ, მოცემული ზედაპირების ნაცვლად გვექნება $\alpha'(\alpha'_2, \alpha'_3)$ სფერო და ორი პროექცირებადი $\beta'(\beta'_3)$ და $\overline{\beta}'(\overline{\beta}'_3)$ სიბრტყე. სფეროსა და სიბრტყეების თანაკვეთით მივიღებთ ორ წრეწირს (რადიუსით $1'_3$ $5'_3$), რომელთა პროფილური გეგმილი იქნება ორი მონაკვეთი, ფრონტალური გეგმილი კი ორმაგი ელიფსი, რომლის საწყის გეგმილზე დაბრუნებით ფრონტალური გეგმილი მისი $б_3$ პროფილური (Π_2 სიბრტყის შებრუნებული გარდაქმნით) მივიღებთ ორი ზედაპირის თანაკვეთის საძიებელი წირის ფრონტალურ გეგმილს.

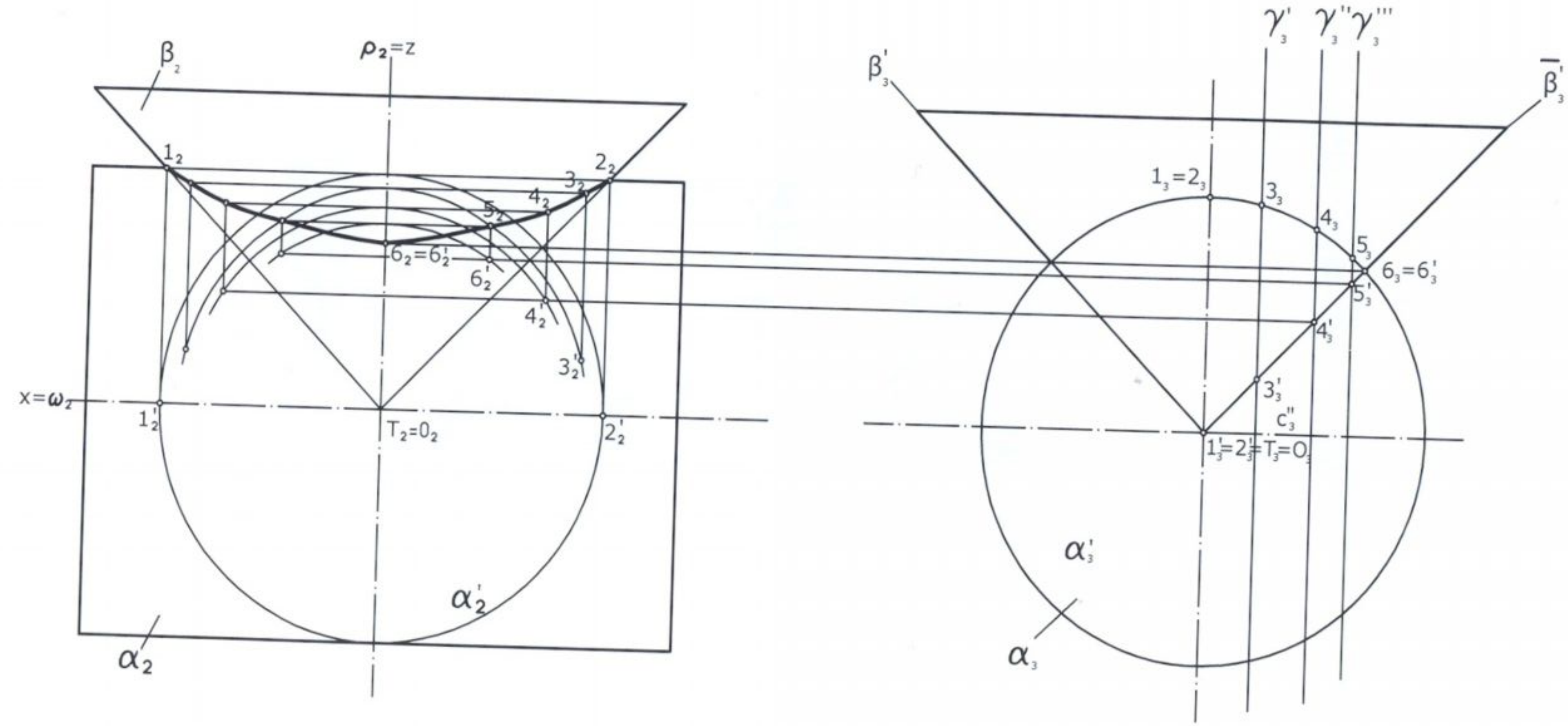
ამ ელიფსის წერტილების ასაგებად ვისარგებლოთ დამხმარე $\gamma'((\gamma'_3), \gamma''(\gamma''_3)$ ფრონტალური სიბრტყეებით, რომლებიც სფეროებს წრეწირებზე გადაკვეთს, $\overline{\beta}'(\overline{\beta}'_3)$ სიბრტყეს - x ღერძის პარალელურ წრფეებზე. მაგალითად, ნახაზზე აგებულია $б'$ წერტილის $б'_2$ ფრონტალური გეგმილი, მისი $б'_3$ პროფილური გეგმილითა და მკვეთი დამხმარე γ'' ფრონტალური სიბრტყით, რომლის γ''_3 პროფილური გეგმილი გადის $б'_3$-ზე. ეს სიბრტყე სფეროს გადაკვეთს c' წრეწირზე, რომლის ფრონტალური გეგმილი იქნება c'_2 წრეწირი. ამ წრეწირის $б'_3$-ზე გამავალი ბმის წრფესთან გადაკვეთით მივიღებთ $б'_2$ წერტილს. მოვახდინოთ Π_2 სიბრტყის შებრუნებული გარდაქმნა, დადგენილი კვადრატული გარდაქმნით, $б'_2$ წერტილი ავსახოთ $б_2$ წერტილზე, რომელიც ეკუთვნის ამოცანაში მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის

წირს. ანალოგიურადაა აგებული თანაკვეთის წირის სხვა წერტილების ფრონტალური გეგმილები, გარდა საყრდენი 1_2 და 2_2 წერტილებისა. ავღნიშნოთ, რომ 3_2 წერტილი ემთხვევა მის შესაბამის $3'_2$ წერტილს, რადგანაც ის მდებარეობს წრეწირზე, რომელიც გარდაქმნის $\rho(\rho_2)$ ორმაგ სიბრტყეზე მდებარეობს და ეკუთვნის როგორც მოცემულ პარაბოლოიდს, ასევე მის შესაბამის α' სფეროს.

2.2.4. ცილინდრის ზედაპირისა და ზოგადი სახის კონუსის თანაკვეთის წირის აგება

ამოცანა 5. მოცემულია ბრუნვის α ცილინდრის ღერძზე მდებარე T წვეროს მქონე ზოგადი სახის β კონუსი, რომლის ფრონტალური მოხაზულობის კონტურული მსახველები ქმნიან მართ კუთხეს, ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი (ნახ.15).

რადგანაც α ცილინდრი პროფილურად პროექცირებადია, ამიტომ საძიებელი თანაკვეთის წირის პროფილური გეგმილი მდებარეობს ამ ცილინდრის α_3 პროფილურ გეგმილზე. მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის წირის ფრონტალური გეგმილის ასაგებად შემოვიღოთ სივრცის გარდაქმნა x ღერძზე გამავალი $\omega(\omega_2)$ სიმეტრიის სიბრტყით და ორმაგი $\rho(\rho_2)$ სიბრტყით, რომლებიც იკვეთება β კონუსის T წვეროზე გამავალ r გარდაქმნის ღერძზე. ეს გარდაქმნა Π_2 სიბრტყეში დაამყარებს x ღერძითა და 0 ცენტრით განსაზღვრულ გარდაქმნას**.** სივრცით გარდაქმნაში ცილინდრის ფრონტალური კვეთის ყოველი მსახველი აისახება ამ მსახველის მხებ წრეწირზე. ყოველი წრეწირის ცენტრი იქნება გარდაქმნის r ღერძზე. ორმაგ $\rho(\rho_2)$ სიბრტყეში მდებარეობს მოცემული ცილინდრის კვეთის წრეწირი, რომელიც თავის თავს შეესაბამება, რის გამოც იგი იქნება ასევე ახალი ზედაპირის კვეთაც. მიღებული ზედაპირის ორი



ნახ.15. ცილინდრის ზედაპირისა და ზოგადი სახის კონუსის თანაკვეთის წირის აგება კვადრატული გარდაქმნის გამოყენებით.

ურთიერთ პერპენდიკულარული წრიული კვეთების სისტემის არსებობა მას განსაზღვრავს როგორც სფერულ ზედაპირს.

მეორე მოცემული ზედაპირი, β კონუსი აისახება ორ β' და $\overline{\beta}'$ სიბრტყეზე (იხ.ნახ.12).

ამრიგად, გარდაქმნის შედეგად, მოცემული ზედაპირების ნაცვლად მივიღებთ α' სფეროს და Π_3 სიბრტყეზე პროექცირებად $\beta'(\beta'_3)$ და $\overline{\beta}'(\overline{\beta}'_3)$ სიბრტეებს. ეს სიბრტყეები სფეროს გადაკვეთენ $\left|1'_3\ 6'_3\right|$ რადიუსის მქონე ორ წრეწირზე. რომელთა პროფილური გეგმილები იქნება მონაკვეთები, ფრონტალური გეგმილი კი ელიფსი (რომელიც ნახაზზე არ არის გამოსახული). ეს ელიფსი არის სივრცის გარდაქმნის შედეგად მიღებული α' სფეროს და ორი β' და $\overline{\beta}'$ სიბრტყის თანაკვეთის წირის ფრონტალური გეგმილი. x ღერძითა და $O_2 = r_2$ ცენტრით მოცემული, Π_2 სიბრტყის შებრუნებული გარდაქმნით, ამ ელიფსის წერტილების საწყის გეგმილებზე დაბრუნებით მივიღებთ ამოცანაში მოცემული ზედაპირების საძიებელი თანაკვეთის წირის ფრონტალურ გეგმილს.

ელიფსის წერტილების ფრონტალური გეგმილების ასაგებად ვისარგებლოთ დამხმარე $\gamma'(\gamma'_3), \gamma''(\gamma''_3)$ ... ფრონტალური სიბრტყეებით, რომლებიც α' სფეროსთან წრეწირებზე იკვეთებიან, $\beta'(\beta'_3)$ და $\overline{\beta}'(\overline{\beta}'_3)$ სიბრტყეებთან კი x ღერძის პარალელურ, ჰორიზონტალურ წრფეებზე. მაგალითად, ნახ.15-ზე $4'$-ის $4'_3$ პროფილური გეგმილით აგებულია $4'_2$ ფრონტალური გეგმილი, რისთვისაც გამოყენებულია დამხმარე მკვეთი γ'' ფრონტალური სიბრტყე, რომლის γ''_3 პროფილური გეგმილი გადის $4'_3$ -ზე, ეს სიბრტყე α' სფეროს გადაკვეთს c' წრეწირზე, რომლის ფრონტალური გეგმილი იქნება c^1_2 წრეწირი. $4'_3$ -ზე გამავალი ბმის წრფის ამ წრეწირთან თანაკვეთით მივიღებთ $4'_2$ წერტილს, რომლის საწყის გეგმილზე

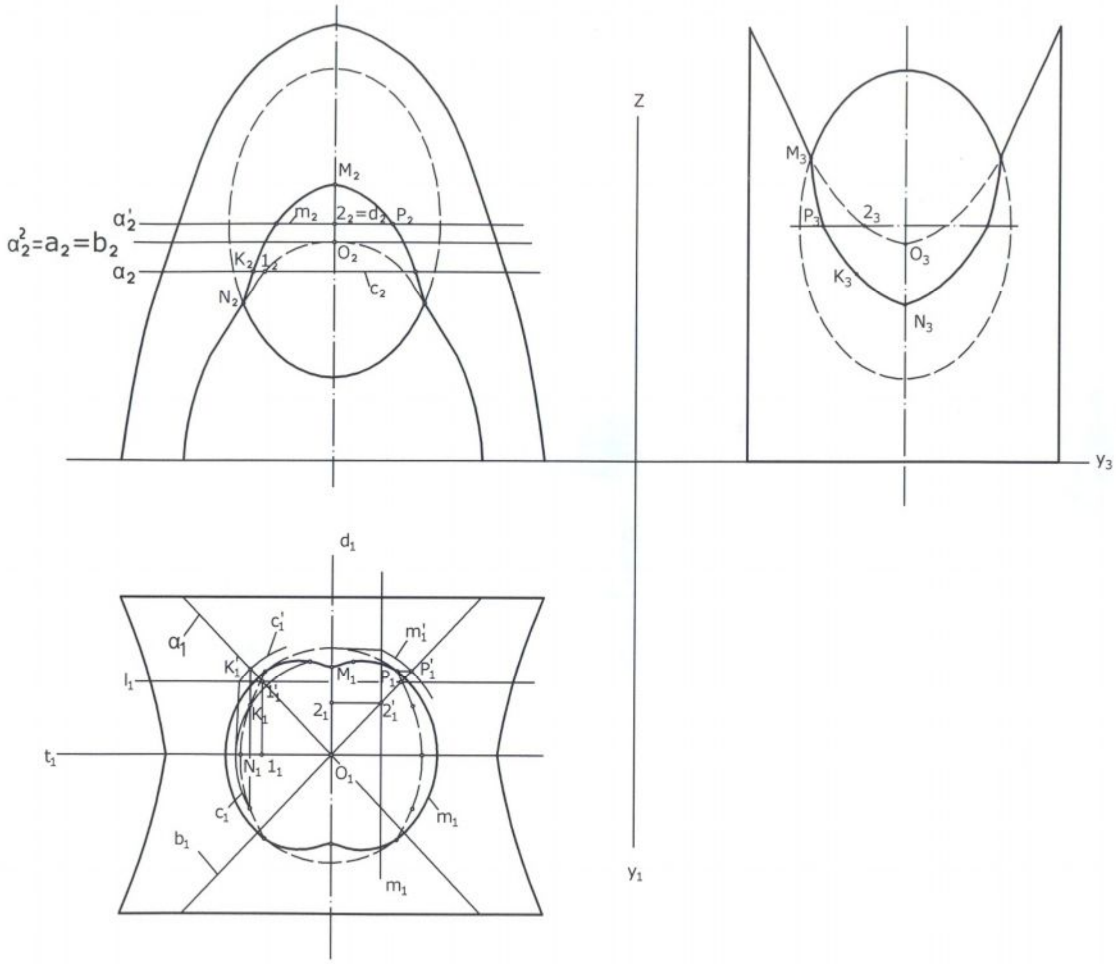
დაბრუნებით, მივიღებთ 4_2 წერტილს, რომელიც მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის საძიებელ წირს ეკუთვნის. ანალოგიურადაა აგებული მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის წირის სხვა წერტილების ფრონტალური გეგმილები, გარდა $1_2, 2_2$ და 6_2 საყრდენი წერტილებისა, რომელთა ასაგებად არ არის საჭირო კვადრატული გარდაქმნის გამოყენება. ავღნიშნოთ, რომ 6_2 წერტილი ემთხვევა თავის შესაბამის $6_2'$ წერტილს, რადგან ის მდებარეობს გარდაქმნის ორმაგი $\rho(\rho_2)$ სიბრტყის იმ წრეწირზე, რომლითაც α ცილინდრი ეხება მის შესაბამის α' სფეროს.

2.2.5. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდისა და ბრუნვის ელიფსოიდის თანაკვეთის წირის აგება

ამოცანა 6. მოცემულია ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი და მასთან საერთო ღერძის მქონე ბრუნვის ზედაპირი, მაგალითად, ბრუნვის ელიფსოიდი. ავაგოთ მათი თანაკვეთის წირი. (ნახ.16).

საძიებელი თანაკეთის წირის ასაგებად გავავლოთ მკვეთი ჰორიზონტალური $\alpha(\alpha_2), \alpha'(\alpha'_2), \alpha_2(\alpha_2^2)$ ... სიბრტყეები. ყოველი მკვეთი სიბრტყის მოცემულ ზედაპირებთან თანაკვეთით მივიღებთ კვეთების წყვილს-ჰიპერბოლას და წრეწირს, რომელთა გადაკვეთის წერტილები ეკუთვნის ზედაპირების თანაკვეთის საძიებელ წირს. სიბრტყის შებრუნებული კვადრატული გარდაქმნის გამოყენებით ჰიპერბოლა ავსახოთ მის ასიმპტოტაზე, წრეწირი კი მის კონცენტრულ წრეწირზე. მიღებული ფიგურების - ასიმპტოტისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილების პირდაპირი გარდაქმნის საშუალებით საწყის პროექციებზე დაბრუნებით მივიღებთ საძიებელი წირის წერტილებს.

ავღნიშნოთ, რომ ჰორიზონტალურ სიბრტყეებთან თანაკვეთის შედეგად მიღებული ყველა ჰიპერბოლის ჰორიზონტალურ გეგმილს ექნება $\mathbf{a_1}$ და $\mathbf{b_1}$ საერთო ასიმპტოტები, რომლებიც ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის **a**



ნახ. 16. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდისა და ბრუნვის ელიფსოიდის თანაკვეთის წირის აგება კვადრატული გარდაქმნის გამოყენებით.

და **b** ასიმპტოტების ჰორიზონტალური გეგმილებია (**a** და **b** ასიმპტოტები ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის კვეთებია მის წვეროზე გამავალ ჰორიზონტალურ $\alpha_2(\alpha_2^2)$ სიბრტყესთან). ასეთ შემთხვევაში შესაძლებელია $\mathbf{\Pi_1}$ სიბრტყის კვადრატული გარდაქმნის გამოყენება, სადაც წერტილთა შესაბამისი წყვილი აიგება გარდაქმნის სქემით, რომელიც მონჟის მეთოდით ინდუცირებულია ჰიპერბოლური ცილინდრით.

მაგალითად, განვიხილოთ ზედაპირების თანაკვეთის $\mathbf{K(K_1K_2K_3)}$ წერტილის აგება, რომელიც მიღებულია მკვეთი $\alpha(\alpha_2)$ სიბრტყის საშუალებით.

$\alpha(\alpha_2)$ სიბრტყე ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს კვეთს ჰიპერბოლაზე, რომლის ერთი შტოს წვეროა $\mathbf{1(1_1 1_2)}$ წერტილი**,** ხოლო მისი ნამდვილი $\mathbf{t(t_1t_2)}$ ღერძი პარალელურია **x** ღერძის (ჰიპერბოლის აგება არაა საჭირო). ამ ჰიპერბოლის ჰორიზონტალური გეგმილი, ანუ ჰიპერბოლა წვეროთი $\mathbf{1_1}$ და $\mathbf{t_1}$ ღერძით (რომელსაც ავიღებთ გარდაქმნის ღერძად) ავსახოთ მის $\mathbf{a_1}$ ასიმპტოტაზე, ანუ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის ასიმპტოტის ჰორიზონტალურ გეგმილზე.

ჰიპერბოლას მის ასიმპტოტაზე ასახვით მოიცემა $\mathbf{\Pi_1}$ სიბრტყის გარდაქმნა, რომლითაც $\mathbf{1_1 \in t_1}$ ჰიპერბოლის წვერო და $\mathbf{a_1}$ ასიმპტოტის $1_1'$ წერტილი იქნება შესაბამისი წერტილები. რადგანაც მოცემული გარდაქმნის ბმის წრფე პერპენდიკულარულია $\mathbf{t_1}$ გარდაქმნის ღერძისა, ამიტომ $(1_1 1_1')\perp \mathbf{t_1}$. $1_1'$ წერტილზე გაივლის $l_1 || \mathbf{t_1}$ საზღვრის წრფე, რომელიც $\mathbf{1_1}$ წვეროს მქონე ჰიპერბოლას ასახავს მის $\mathbf{a_1}$ ასიმპტოტაზე. ამ შებრუნებული გარდაქმნით $\alpha(\alpha_2)$ სიბრტყის ბრუნვის ელიფსოიდთან კვეთის c_1 წრეწირის ჰორიზონტალური გეგმილი აისახება კონცენტრულ c_1' წრეწირზე. ამრიგად, ერთ მკვეთ სიბრტყეში მდებარე ჰიპერბოლისა და წრეწირის ჰორიზონტალური გეგმილები, $\mathbf{\Pi_1}$ სიბრტყის შებრუნებული გარდაქმნით აისახა $\mathbf{a_1}$ ასიმპტოტაზე და c_1' წრეწირზე, რომლებიც K_1' წერტილში იკვეთება. K_1' წერტილის საწყის გეგმილზე დაბრუნებით ($\mathbf{\Pi_1}$ სიბრტყის

პირდაპირი გარდაქმნით) მივიღებთ **K₁** წერტილს, რომელიც ეკუთვნის თანაკვეთის წირის ჰორიზონტალურ გეგმილს. ავღნიშნოთ, რომ $\alpha^2(\alpha_2^2)$ სიბრტყის (რომელიც ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდთან იკვეთება ორ **a** და **b** წრფეზე) ქვემოთ განლაგებული მკვეთი ჰორიზონტალური სიბრტყეები, ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდთან იკვეთება ჰიპერბოლებზე, რომელთა ნამდვილი ღერძები **x** ღერძის პარალელურია; ხოლო $\alpha^2(\alpha_2^2)$ სიბრტყის ზემოთ განლაგებული მკვეთი ჰორიზონტალური სიბრტყეები ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდთან იკვეთება ჰიპერბოლებზე, რომელთა ნამდვილი ღერძები **y** ღერძის პარალელურია; მაგალითად, მკვეთი $\alpha^1(\alpha_2^1)$ სიბრტყე ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდთან იკვეთება ჰიპერბოლაზე, წვეროთი **2($2_1 2_2 2_3$)** წერტილში და ნამდვილი **d** ღერძით, ამ ჰიპერბოლას ჰორიზონტალური გეგმილი არის ჰიპერბოლა წვეროთი **2_1** და **y_1**-ის პარალელური ნამდვილი ღერძით.

ასეთი ჰიპერბოლა, **Π_1** სიბრტყის შებრუნებული ასახვით, რომლის სიმეტრიის ცენტრი შეთავსებულია ჰიპერბოლის ნამდვილ **d_1** ღერძთან, აისახება თავის ასიმპტოტაზე (მაგალითად, **b_1**). გარდაქმნის მოცემის დასრულებისათვის, საჭიროა სასაზღვრო **q_1** წრფის აგება, რომელიც გაივლის ჰიპერბოლას **$2_1 \in d_1$** წვეროს შესაბამის, ასიმპტოტის $2_1' \in b_1$ წერტილზე. რადგან ზმის ხაზები გარდაქმნის **d_1** ღერძის პერპენდიკულარულია, ამიტომ $(2_1 2_1') \perp d_1$. **Π_1** სიბრტყის მოცემული შებრუნებული გარდაქმნით ბრუნვის ელიფსოიდის მკვეთ $\alpha^1(\alpha_2^1)$ სიბრტყესთან კვეთის **m** წრეწირის ჰორიზონტალური **m_1** გეგმილი აისახება კონცენტრულ m_1' წრეწირზე. ეს წრეწირი და **b_1** ასიმპტოტა იკვეთება P_1' წერტილში, რომლის საწყის გეგმილებზე დაბრუნებით (**Π_1** სიბრტყის გარდაქმნით) მივიღებთ მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის საძიებელი წირის **P** წერტილის **P_1** გეგმილს. ანალოგიურადაა ნაპოვნი თანაკვეთის წირის აგებისათვის აუცილებელი წერტილების რაოდენობა, გარდა

საყრდენი **N** და **M** წერტილებისა, რომელთა პოვნისათვის არ არის საჭირო კვადრატული გარდაქმნის გამოყენება.

ზოგადი დასკვნები და შედეგები

სივრცის გარდაქმნების დახმარებით ნაშრომში გადაწყვეტილია გამოყენებითი გეომეტრიის შემდეგი პოზიციური ამოცანები:

- ტოპოლოგიური გარდაქმნების გამოყენებით აგებულია ნებისმიერი ფრონტალური მოხაზულობის მქონე ზედაპირისა, რომელსაც გააჩნია მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსური კვეთები და პრიზმის თანაკვეთის წირი;
- ტოპოლოგიური გარდაქმნების გამოყენებით აგებულია ნებისმიერი ფრონტალური მოხაზულობის მქონე ზედაპირისა, რომელსაც გააჩნია მსგავსი და მსგავსად განლაგებული ელიფსური კვეთები და ჰორიზონტალურად პროექცირებადი სიბრტყის თანაკვეთის წირი;
- ტოპოლოგიური გარდაქმნების გამოყენებით აგებულია ელიფსური პარაბოლოიდისა და ფრონტალურად პროექცირებადი ცილინდრის თანაკვეთის წირი;
- კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით აგებულია ბრუნვის პარაბოლოიდისა და ზოგადი სახის კონუსის თანაკვეთის წირი;
- კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით აგებულია ბრუნვის ცილინდრისა და ზოგადი სახის კონუსის თანაკვეთის წირი.
- კვადრატული გარდაქმნების გამოყენებით აგებულია ჰიპერბოლური პარაბოლოიდისა და მასთან საერთო ღერძის მქონე ბრუნვის ელიფსოიდის თანაკვეთის წირი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Артин Э. Геометрическая алгебра. М.:Наука. 1969.
2. БержеМ. Геометрия. Т. 1-2. М.:Мир. 1984.-559 с.; 336 с.
3. Биркгоф Г. Теория решеток. М.:Наука. 1984. - 586 с.
4. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. М.:ИЛ. 1955. -400 с.
5. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.:Наука. 1981.
6. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.:Мир. 1982. - 452 с.
7. Картеси Ф. Ввведение в конечные геометрии. М.: Наука. 1980.
8. Коксетер Г.С.М., Грейтц С.Л. Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.
9. Лашхи А.А. Основная теорема проективной геометрии в модулях и алгебрах Ли. Итоги науки и техники. Проблемы геометрии/ВИНИТИ. 1986. 18.с.165-187.
10. Лашхи А.А. Проективная геометрия модулей и алгебр Ли. Доктор. дисс. Тбилиси. 1988.
11. Скорняков Л.А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М.:Наука. 1961. 198 с.
12. Kemkhadze S. Geometries which are assotiated with general geometric latices. Bull. Acad. Sci. of Georgia, V.137. No3. 1998.
13. Kemkhadze S. The embedding theorem for A-complemented modular lattices. Bull.Acad.Sci. of Georgia. V.137. No4. 1998.
14. Kemkhadze S., Rostomashvili Z. General Geometric Lattices. Bull, of Georgian Acad. of Sci. V.158, Nol, 1998. 14-17.
15. Lashkhi A.A. Axiomaticx of Pl-projective geometries. Bull. Acad.Sci. Georgia 130(1988). Nol. 37-40/
16. Lashkhi A.A. Fundamental theorem of affme geometry for Lie algebras and modules. The Results of Scien. and Tech.Probl. Geom. VINITI 18(1986), 165-187.
17. Lashkhi A. A. General geometric lattices and projective geometry of modules. J. of Math.Sci. New-York. V.74. No3. 1995. 1044-1072.
18. Maclane S. A lattice formulation for transcendence degree and p-

basis. Duke Math. J. 1938. -4. p.455-468.

19. Maclane S. Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective. Amer.Math.J. 58(1936), 236-240.

20. Maeda F. Lattice theoretic characterization of abstract geometries. J.Sci. Hiroshima Univ. 15(1956), 87-98.

21. Maeda F., Maeda S. Theory of symmetric lattices. Springer-Verlag. New-York. 1970.

22. Menger K. New foundation of projective and »affme geometry. Ann.Math. 37(1936), 456-482.

23. Monk G., Desargues Law and the representation of primary lattices. Pacif. J.Math. 30(1969), Nol, 175-186.

24. Neumann J. Algebraic theory of continues geometry. Proc.Nat.Acad.Sci. USA. 22(1937), 16-22.

25. Neumann J. Continues Geometry. New-York, Prinseton Univ. Press. 1960.

26. Rostomashvili Z. Pappus Axiom in Modular D-geometrical Lattices. Bull, of the Georgian Acad. of Sci. V.160, Nol, 1999. 33-34.

27. Rostomashvili Z. Remark to the Projective Geometry over Rings and Corresponding Lattices. Bull, of the Georgian Acad. of Sci. V.160. N02. 1999. 211-212.

28. Rostomashvili Z., Shavgulidze A. On the geometries associated with general geometric lattices. Georgian Engineering News. No4. 2000. 33-34.

29. Sasaki U., Fujiwara S.-The decomposition of matr'oid latice. J.Sci. Hirosima Univ. 15(1952), 233-238.

30. Schmidt S.E. Projective spaces on partially ordered sets and Dessargues' postulate. Geom.Dedicata. V.37, 1989, 233-243.

31. Segre B. Lectures on modern geometry. Roma, Gremonese, 1961.

32. VeblenO, Young F.W. Projective geometry. V.l-2. Boston, 1918-1938.

33. Whitney H. On the abstract properties of linear dependence. Amer.J.Math. 1935.-57. p.509-533.

34. Wille R. Finite projective planes and equational classes of modular lattices. Atta col. Inter teotie combinatorie. Roma. 1973.

35. Вальков К.И. Геометрические аспекты принципа инвариантной неопределенности. Л.:Изд. ЛИСИ, 1975, с.143.

36. Джапаридзе И.С. Конструктивные отображения проективных преобразований пространства. Тбилиси:Изд. ГТИ им. В.И.Ленина, 1964.

37. Джапаридзе И.С. Построение конструктивных моделей пространств, их систематизация и связь с методами изображений, применяемыми в технике. Дисс. на соиск. ученой степени д.т.н. Тбилиси, 1965.

38. Джапаридзе И.С., Кикабидзе Г.И. Конструктивные особенности некоторых 4-мерных поверхностей, моделируемых коллинеациями//Труды ГНИ, №1(Н1), Тбилиси, 1971, с.59-67.

39. Иванов Г.С. Поверхности и кривые расслояемых нелинейных преобразований в начертательной геометрии и технике. Автореф. докт.дисс. М. 1977.

40. Кикабидзе Г.И. Биаксиальное отображение 4-мерного пространства на плоскость и его практическое применение. Автореф. дисс. на соиск. ученой степени к.т.н., Тбилиси, 1971.

41. Котов И.И. Эпюр Монжа многомерных пространств/В сб. "Вопросы вычислительной математики и геометр, моделирования", Ленинград, 1966, с.70-74.

42. Котов И.И. Эпюр Монжа многомерных пространств/Вопросы вычислительной математики и геометрического моделирования. ЛенинградЛИСИ, 1966.

43. Мчедлишвили Е.А. Проективные основания начертательной геометрии// Труды ГПИ, №19, Тбилиси, 1948, с.115-190.

44. Обухова В.С. Поверхности высших порядков как результат пересечения соответственных пар множеств сфер и окружностей/Шрикладная геометрия и инж. графика. Вып. 12, Киев, 1971, с.29-36.

45. Петрова А.Т. Геометрические основы конструирования трансцендентных поверхностей применительно к машиностроению/Автореф. дисс. на соиск. ученой степени к.т.н., Киев, 1977.

46. Подгорный А.Л. Геометрическое моделирование пространственных конструкций. Автореф. докт.дисс. М. 1975.

47. Прянишникова З.И. Обобщения проекции Е.С.Федорова/Методы начертательной геометрии и ее приложения. М., 1965.

48. Тевлин А.М. Нелинейные модели пространства и конструирование поверхностей. Автореф. докт. дисс. М. 1975.

49. Четверухин Н.Ф. Основная теорема аксонометрии и построение аксонометрических систем в центральной проекции/В сб. "Методы

начертательной геометрии и ее приложения". М.ТИТТЛ, 1955, с.105-111.

50. Четверухин Н.Ф. Условные изображения и параметрический метод их построения. Сб. статей Вопросы начерательной геометрии. М. Гостехиздат. 1947.

51. Шавгулидзе А.С. Об одной интерпретации метода проекций с отметками для трехмерного пространства//Труды ГПИ, №5(140), с.62-69.

52. Шавгулидзе А.С. Обобщение метода проекций t> высотными отметками на случай четыерхмерного евклидова пространства//Труды ГПИ, №5(140), Тбилиси, 1970, с.70-77.

53. Шавгулидзе А.С. Применение некоторых способов преобразования ортогональных проекций в методе проекций с отметкам-и/ЛГруды ГПИ им.В.И.Ленина, 1967.

54. Штофф В.А. О роли моделей в познании. Л.:Изд-во Ленинградского университета, 1963, с. 128.

55. Fucke R., Kirch K. Darstellende Geometric. Leipzig, 1962.

56. Moller E. Vorlesungtnober darst. Georn., B.I. Leipzig, 1923.

57. Шавгулидзе А. С., Лашхи А. А., Хатискаци И. Е. и др., Применение топологических преоюразований для решения позиционных задач прикладной гелметрии. Тб., Труды ГТУ, Юбилейный выпуск, =7 (446), 2002. с.214-215.

58. Хатискаци И. Е., Применение квадратичных преобразований в решении задач начертательной геометрии. Тб., Труды ГТУ, Юбилейный выпуск, 7 (446), 2002. с.216-218.

59. Khatiskatsi I. E., Solution of Position with Collinear Space Formatyions. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, Vol. 170, =1, July-August, 2004. p.113-114.

60. Khatiskatsi I. E., Solution of Space Problems by means of Square-Law Transformation 170, =2, September-October, 2004. p. 307-308.

ავტორის მიერ გამოქვეყნებული შრომები

1. Об одном примененений коллинеарных преобразований. Тб., "Инженерные новости Грузии", №3,2006, 62-63. (И.Хатискаци).

2. About One Application of Topological Transformations. Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences, Vol. 174, №1, July-August, 2006, p.103-104. (I.Khatiskatsi).

3. Пример решение позиционной задачи с применением квадратичного преобразования. Пространства. Тб., "Инженерные новости Грузии", №3,2006, 64-66. (И.Хатискаци).

4. About Construction of Intersection Line of cylinder Surface Rotation with Cone. Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences, Vol. 174, №2, 2006, (I.Khatiskatsi, N.Nikvashvili).

5. О построении линии пересечения поверхности гиперболического параболоида с эллипсоидом вращения. Тб., "Инженерные новости Грузии", №4,2006 (Н.Никвашвили, И.Хатискаци).